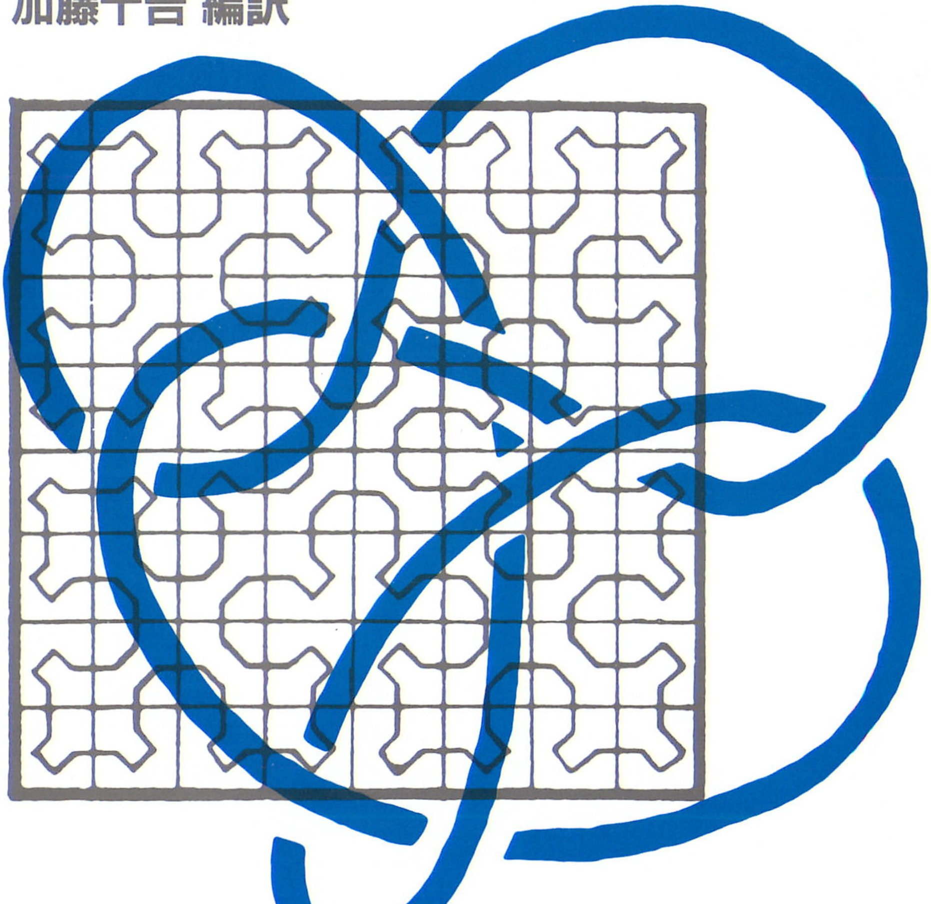
C. Kosniowski

A First Course in Algebraic Topology

トポロジー入門

クゼ・コスニオフスキ 著

加藤十吉 編訳



東京大学出版会

C. Kosniowski

A First Course in Algebraic Topology

トポロジー入門

クゼ・コスニオフスキ 著

加藤十吉 編訳

東京大学出版会

Translated from the original English text of
A First Course in Algebraic Topology
by Czes Kosniowski

訳者まえがき

現在，トポロジー(位相幾何学)は殆どの大学の数学科の専門科目の中の基礎科目としてとりいれられている．教科としてのトポロジーでは，ホモロジー群や基本群等の計算に重点を絞らざるを得ないのが現状であろう．義務教育の段階で，すでに断片的にトポロジーの知識をもつ学生にとっても，また，トポロジーの研究の面白みのわかっている先生にとっても，そのことはなにかもの足りない妥協であるといえる．というのは，大げさに言えば，トポロジーは人類の図形に対する幾何学的認識をその人間性の中に自由に解放したものであり，先生も学生もその点を教示したい，学びたいと望んでいるに違いないからである．とはいえ，そのことを実際に教科で実行するのは非常に困難である．また，通俗書的表現にしても，教科としてはそのまま適用できないものが多い．

本書は，従来の教科書では記述しえなかった，そうしたトポロジーにおける図形の見方，研究方法及び手段について，平易に，しかも学問的には総合的立場に立ちながら厳格に記述することに成功したといえる．原著書の適切な表現力に訳者は敬意を表したい．同時にこの拙訳が，トポロジーとは本当はどういうことをする学問なのか，という疑問をもつ読者に幾分でも役に立てば幸せである．

ここに，翻訳の仲介の労をとっていただいた東京大学の杉浦光夫教授，翻訳に協力していただいた早稲田大学の山本慎，三好重明，相馬輝彦，滝沢実の4氏及び清書を手伝っていただいた九州大学の竹内義浩，藤原雅子，中尾寿康の3氏に感謝いたします．

加　藤　十　吉

福岡の生(いき)の松原にて

1983年7月15日

序　文

本書は，平均的学生向けの代数的トポロジーの入門書として，あまり予備知識を仮定しないで様々な内容を提供する．幾何学的観点から書くことを重視し，図や実例による説明をふんだんにとり入れた（トポロジーは幾何学の一分野なのである）．抽象化はできるかぎり避け，新しい概念を導入するにあたっては，全体的に，歩行者的接近を行った．予備知識は最小限ですむようにし，とくに，点集合論または位相空間論の知識は皆無でもかまわないものとし，代数的トポロジーに主眼をおく入門書としてふさわしいものとした．この本を使用するにあたって，学部専門課程の初学者向けの講義を担当する先生は講義の企画にあたってかなりの自由度をもつことができる．読者に課される様々な難度の練習問題も多く出してある．勿論，出来る限り多くの問題を解くべきだろう．しかし，それらを全部やる必要はない．というのは，いかなる段階でも，読者が練習問題を解いてしまっているということは殆ど仮定していないからである．練習問題の解答が本文で必要になるときには，実際にそれを与えることを原則とした．

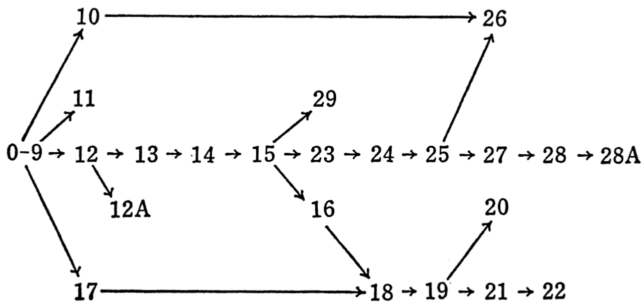
本書の諸内容は，トポロジーと代数的トポロジーの話題の中から，“教示できることである”という基準によって選んだものである．それらはトポロジーの中でもかなり見事な成果の部類である．更に進む読者の為に，広い範囲の研究案内を最終章に与えてある．

大雑把にいえば，この本の 1/4 は一般トポロジーについて，そして，3/4 は代数的トポロジーについて書いてある．一般トポロジーの部分では通常の総論風にではなく，トポロジーの“面白さ”が読者に早くわかってもらえるような

素材を与えた．代数的トポロジーの部分では，その主題を空間の基本群においた．学生は基本群の概念を平易に把握してゆき，そして，そのことは代数的トポロジーとは一体何を研究するのかということへの良い入門となる．被覆写像の理論と Seifert-Van Kampen 定理は詳細に説明してあり，共に基本群を計算するのに使用されている．他の項目としては，多様体，曲面，ジョルダン曲線定理(第12章への付録として)，結び目の理論，そして，特異ホモロジーへの入門章がある．

この本はトポロジーについて書いたものであり，トポロジーの歴史について書いたものではない．そういうわけで，関係する人名，年代については必ずしも網羅していない．

この本を読むには，章を追って順に読んでゆく必要はない．次の図表で章同志の関連を示しておく．例えば，18章を完全に理解する為には，0-9章，12-17章を前もって読んでおけばよい．



クゼ　コスニオフスキ

タイン河畔－ニューキャスルにて

1979年9月

目　次

0

集合と群

この章では，本書で使用する集合論及び群論における基礎的な定義や結果についてのべる．必要に応じてこの章を参照するのがよい．

集合 X, Y に対し，Y が X の部分集合であることを記法 $Y \subseteq X$ を使って表わし，$Y \subset X$ は，Y が X の部分集合であり，$Y \neq X$ であることを表わす．もし，$Y \subseteq X$ であれば，$X - Y$ によって Y に属さぬ X の元の全体のなす集合を表わす．空集合を $\varnothing$ と表わす．

2つの集合 X と Y の**直積**とは，X の元 x と Y の元 y の順序づけられた対 (x, y) のなす集合のことである．すなわち，

$$X \times Y = \{(x, y)\,;\ x \in X, y \in Y\}.$$

集合の有限個の集まり $\{X_i\,;\ i=1, 2, \cdots, n\}$ の直積が同様に定義される：

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,;\ x_i \in X, 1 \leqq i \leqq n\}.$$

集合の間の**写像**または**関数** $f: X \to Y$ とは，X の各元 x に，Y の唯1つの元 $f(x)$ を関係づける対応のことである．集合 X の恒等写像 $1: X \to X$ とは，すべての元 $x \in X$ について，$1(x) = x$ である写像のことである．写像 $f: X \to Y$ の**像**が次のように定義される．

$$\mathrm{Im}(f) = f(X) = \{y \in Y\,;\ \text{ある } x \in X \text{ に対し，} y = f(x)\}.$$

X の2つの部分集合 W, W' に対し次のことが成立することに注意する．

$$f(W \cup W') = f(W) \cup f(W')$$
$$f(W \cap W') \subseteq f(W) \cap f(W').$$

より一般に，ある集合 J で添字づけられている X の部分集合族 $\{W_j; j \in J\}$ があれば，そのとき次が成立する；

$$f(\bigcup_{j\in J} W_j) = \bigcup_{j\in J} f(W_j),$$

$$f(\bigcap_{j\in J} W_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} f(W_j).$$

混乱の生ずる恐れがないときには，写像 $f: X\to Y$ をしばしば簡単に f と表わす．写像$f: X\to Y$ は X から $f(X)$ への写像を定義し，これもまた f と表わされる．A が X の部分集合であれば，f の A への制限は $f|A$ と表わされる；これは$(f|A)(a)=f(a), a\in A$ によって定義される写像 $f|A: A\to Y$ のことである．

Z が Y の部分集合であり，$f: X\to Y$ が写像であれば，

$$f^{-1}(Z) = \{x\in X | f(x)\in Z\}$$

を Z の f による**逆像**という．

Y の 部分集合の族 $\{Z_j ; j\in J\}$ に対し次のことに注意する．

$$f^{-1}(\bigcup_{j\in J} Z_j) = \bigcup_{j\in J} f^{-1}(Z_j),$$

$$f^{-1}(\bigcap_{j\in J} Z_j) = \bigcap_{j\in J} f^{-1}(Z_j),$$

$$f^{-1}(Y-Z_j) = X-f^{-1}(Z_j).$$

もしも，$x_1, x_2\in X, x_1\neq x_2$ であるときには必ず$f(x_1)\neq f(x_2)$ となるとき，写像 $f: X\to Y$ は**1対1の写像**または**単射**であるという．$f(X)=Y$ であれば，写像 $f: X\to Y$ は**上への写像**であるまたは**全射**であるという．単射でありかつ全射でもある写像 $f: X\to Y$ は**全単射**とよばれる．この場合，

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

によって定義される**逆写像** $f^{-1}: Y\to X$ が存在する．

もし，$f: X\to Y$ 及び $g: Y\to Z$ が写像であれば，そのとき**合成写像** $gf: X\to Z$ が次のように定義される；

$$gf(x) = g(f(x)), x\in X.$$

写像 $f: X\to Y$ が全単射なら，$ff^{-1}: Y\to Y$ 及び $f^{-1}f: X\to X$ は恒等写像である．逆に，もし $gf: X\to X$ 及び $fg: Y\to Y$ が恒等写像であれば，f と g は全単射で，互いに他の逆写像となっている．$gf: X\to X$ が恒等写像であるという条件から f が単射である及び g が全射であることがでてくる．

集合 X における**関係**$\sim$とは $X\times X$ の部分集合$\sim$のことである．通常，(x, y)

$\in \sim$であるということを$x \sim y$と表わす．Xにおける関係$\sim$が**同値関係**であるとは，次の条件をみたすときをいう．

(i) 反射律：$x \sim x$(すべての$x \in X$)．

(ii) 対称律：$x \sim y$ならば$y \sim x$である．

(iii) 推移律：$x \sim y$かつ$y \sim z$であれば，$x \sim z$である．

$[x] = \{y \in X;\ x \sim y\}$

をxの**同値類**という．

関係$\sim$がXの同値関係であればXの各元はただ1つの同値類に属する．

集合Xでの**2項演算**とは写像$f: X \times X \to X$のことである．$f(x, y)$のことをxy(乗法記法)またはときによって$x+y$(加法記法)と略記する．

集合Gと次の3条件をみたすGでの2項演算を一緒に考えたものを**群**という．

(1) 元$1 \in G$, Gの**単位元**，が存在して，すべての元$g \in G$に対し，次をみたす：

$$g1 = 1g = g.$$

(2) 各元$g \in G$に対して，ある元$g^{-1} \in G$, gの**逆元**，が存在して次をみたす：

$$gg^{-1} = g^{-1}g = 1.$$

(3) かってな3つの元$g_1, g_2, g_3 \in G$に対して**結合法則**が成立する．すなわち，

$$(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3).$$

加法記法では，単位元は0そしてgの逆元は$-g$と表わされる．その元が単位元のみからなる群は自明な群$\{1\}$または$\{0\}$である．

群Gの部分集合HがGの部分群であるとは，Gの2項演算のもとでHが群をなすときをいう．もしHがGの部分群であり$g \in G$であれば，

$$gH = \{gh\ ;\ h \in H\}$$

をHのgによる**左剰余類**という．**右剰余類**も同様に定義される．2つの左剰余類$gH, g'H$は交わらないか一致するかのいずれかである．

2つの群GとHの**直積**$G \times H$は$(g, h)(g', h') = (gg', hh')$によって定義される2項演算をもつ集合$G \times H$のことである．加法的な場合にはこれを**直和**といい，$G \oplus H$と表わす(これは群をなしている：訳者注)．

群 G から群 H への**準同型** $f: G \to H$ とは,

$$f(gg') = f(g)f(g') \qquad (\text{すべての } g, g' \in G)$$

をみたす写像のことである. もし, 準同型 $f: G \to H$ が全単射であれば G と H は同型な群である. f は**同型**であるといい, $G \cong H$ または $f: G \cong H$ と表わす.

$\ker f = \{g \in G\ ;\ f(g) = 1_H\}$, 但し, 1_H は H の単位元, を準同型 $f: G \to H$ の**核**という, 同型の核は G の単位元のみからなる.

群 G の部分群 K が**正規**であるとは, すべての $g \in G, k \in K$ に対し, $gkg^{-1} \in K$ となるときをいう. 準同型 $f: G \to H$ の核 $\ker f$ は G の正規部分群である. 準同型 $f: G \to H$ が単射である為の必要十分条件は $\ker f = \{1\}$ となることである.

もし K が G の正規部分群であれば, 左剰余類 gK は右剰余類 Kg に等しく, K のすべての剰余類の全体 G/K は次の演算のもとで群をなす:

$$(gK)(g'K) = (gg')K.$$

G/K を **K による G の商群**という.

第一準同型定理は, もし $f: G \to H$ が群 G から群 H の上への準同型で, 核 K をもつならば, H は商群 G/K に同型であることを主張している.

もし, $g \in G$ であれば, **g によって生成される部分群**とは, g のすべての整数ベキからなる部分集合

$$\langle g \rangle = \{g^n\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$$

のことである. 但し, $g^n = \overbrace{gg\cdots g}^{n}(n \geq 0)$ そして $g^n = \overbrace{g^{-1}g^{-1}\cdots g^{-1}}^{-n}(n < 0)$ である. 加法的な場合には,

$$\langle g \rangle = \{ng\ ;\ n \in \boldsymbol{Z}\}$$

である. 但し, $ng = \overbrace{g+g+\cdots+g}^{n}(n \geq 0)$ そして $ng = \overbrace{(-g)+(-g)+\cdots+(-g)}^{-n}(n < 0)$ である. ある元 g に対し, $G = \langle g \rangle$ であれば, G を生成元 g の**巡回群**であるという. 一般に, 群 G の**生成元の集合**または**生成系**とは, G の部分集合 S で, G の各元が S の元のベキの積となるときをいう. もし, 生成系 S が有限であれば G は**有限生成**であるという.

群 G が**アーベル群**である, または**可換**であるとは,

$$gg' = g'g \qquad (\text{すべての } g, g' \in G),$$

であるときをいう．例えば，整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ は加法についてアーベル群である；さらに，$+1$ または -1 によって生成される巡回群である．

$\boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}$ (n 個の直和) に同型な群のことを**階数 n の自由アーベル群**という．

有限生成アーベル群に対する分解定理は，もし G が有限生成アーベル群であるならば，G は

$H_0 \oplus H_1 \oplus \cdots \oplus H_m$，　但し，$H_0$ は自由アーベル群であり，$H_i, i=1, \cdots, n$, は素数ベキの位数をもつ巡回群である，

に同型となること，しかも，H_0 の階数，巡回群 $H_1, \cdots, H_n$ の位数が一意的に決定される，ことを主張している．

群 G の**交換子**とは，$ghg^{-1}h^{-1}$ の形の元のことである．G の交換子のすべての有限積のなす G の部分集合(これは部分群をなす)を G の**交換子群**という．G の交換子群 K は G の正規部分群であり，実際，G/K がアーベル群となるような G の最小の正規部分群である．

実数，複素数，整数，自然数(すなわち正の整数)，有理数の全体のなす集合をそれぞれ，$\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{Q}$ と表わす．しばしば，$\boldsymbol{R}$ を**実数直線**，$\boldsymbol{C}$ を**複素数平面**という．集合 $\boldsymbol{R}^n$ とは $\boldsymbol{R}$ の n 個の直積のことである．

区間と呼ばれる $\boldsymbol{R}$ の部分集合を次の記法で表わす：

$$(a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a < x < b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a \leqq x \leqq b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a \leqq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ a < x \leqq b\}.$$

部分集合 $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$ および (a, ∞) の意味は明らかであろう．$(-\infty, \infty) = \boldsymbol{R}$ とみなせる．

(a, b) は $\boldsymbol{R}$ における区間を表わすばかりでなく，元 a, b の対例えば，$\boldsymbol{R}^2$ の元，を表わすのにも使用されていることに注意する．実際上では，その文脈からそれが何を表わしているかは明らかになるだろう．

1

背 景: 距離空間

トポロジーでは，集合の構造の中で，それに関して，写像 $f: X \to Y$ が連続であるか，いなか？ という問題が意味をもつような構造について研究する．本章では，ユークリッド空間や距離空間を観察することによって，この“構造”とは何であるかを調べてゆこう．

関数 $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ について，f が $\boldsymbol{x}$ **で連続であるとは**，どんな $\varepsilon_x > 0$ に対しても，$\delta_x > 0$ が存在し，$|y-x| < \delta_x$ であれば必ず $|f(y)-f(x)| < \varepsilon_x$ となるということであったのを想起しよう．そして，すべての点 $x \in \boldsymbol{R}$ で連続な関数は連続であるといわれた．写像 $f: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ についてこの連続性の定義を拡張するには，単に絶対値記号をユークリッド的距離でおきかえればよい．より一般に，“距離関数”をもった集合については，それらの距離関数を使用して連続性を定義することができる．“距離関数”——正式には，距離と呼ばれる——はいくつかの(あたりまえの)条件をみたさなくてはならず，これが定義へと導く．

1.1 定　　義

A を集合とする．関数 $d: A \times A \to \boldsymbol{R}$ が次の 2 条件をみたすとき A の**距離**という：かってな，$a, b, c \in A$ に対し，

(i) $d(a, b) = 0 \Longleftrightarrow a = b$

(ii) $d(a, b) + d(a, c) \geq d(b, c)$.

集合 A に A の 1 つの距離 d が指定されているとき，**距離空間**と呼ばれ，(A, d) または簡単に，A と表わされる．

第二の性質 (ii) は 3 角不等式として知られているものである．

1.2　問　　題

d が A の距離であれば，$d(a,b)\geq 0$ であり，$d(a,b)=d(b,a)$ がすべての $a,b\in A$ に対し成立することを示せ．

$A=\boldsymbol{R}$ かつ $d(x,y)=|x-y|$ とすれば，d が距離であることをみるのは難しくない．より一般に，$A=\boldsymbol{R}^n$ とし，

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}=\|x-y\|$$

$$\text{但し，}\ x=(x_1,\cdots,x_n)\ \text{かつ}\ y=(y_1,\cdots,y_n)$$

によって d を定義しよう．再び，d が $\boldsymbol{R}^n$ の距離であるのを示すのは困難ではない．この距離は**ユークリッド距離**または $\boldsymbol{R}^n$ の**通常の距離**と呼ばれる．

$A=\boldsymbol{R}^n$ の他の2種類の距離が次のように与えられる：

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,\quad d(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$$

これらが実際に距離であるのを検証することは読者の練習問題としておく．

A がどんな集合であっても，A の1つの距離 d を次の規則のもとに定義できる；$d(x,y)=0\ (x=y)$，$d(x,y)=1\ (x\neq y)$．こうしてえられた距離のことを A の**離散距離**という．

1.3　問　　題

(a)　以下の各々は $\boldsymbol{R}^n$ の距離であることを示せ．

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}=\|x-y\|\ ;$$

$$d(x,y)=\begin{cases}0\ (x=y)\\1\ (x\neq y)\end{cases}\ ;$$

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\ ;\ d(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|.$$

(b)　$d(x,y)=(x-y)^2$ は $\boldsymbol{R}$ の距離を定義しない．

(c)　$d(x,y)=\min_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$ は $\boldsymbol{R}^n$ の距離を定義しない $(n\geq 2)$．

(d)　d を距離とし，r を正の実数とする．$d_r(x,y)=rd(x,y)$ と d_r を定義すると，d_r も距離となることを示せ．

(e)　d を距離とする．$d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ により定義される d' も距離であることを示せ．

(f) $\boldsymbol{R}^2$ において，$d(x,y)$=「x と y の通常の距離 $\|x-y\|$ 以上(等しいかより大きい)の最小の整数」と定義する．d は $\boldsymbol{R}^2$ の距離であるか？

すでに述べたように，距離空間の間の写像の連続性を定義するのはもはや容易である．

1.4 定　義

$(A, d_A), (B, d_B)$ を距離空間とする．写像 $f: A \to B$ が点 $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}$ **で連続であるとは**，どんな $\varepsilon_x > 0$ に対しても，$\delta_x > 0$ が存在して，$d_A(x,y) < \delta_x$ のときは必ず $d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon_x$ となるときをいう．写像 f **が連続であるとは**，それがすべての点 $x \in A$ で連続であるときをいう．

1.5 問　題

(a) A を距離 d をもつ距離空間とする．$y \in A$ とする．関数 $f: A \to \boldsymbol{R}$ を $f(x) = d(x,y)$ と定めれば，連続である．但し，$\boldsymbol{R}$ は通常の距離をもつとする．

(b) M を距離空間$(\boldsymbol{R}, d)$，但し d は $\boldsymbol{R}$ の通常の距離である，とする．M_0 を距離空間 $(\boldsymbol{R}, d_0)$，但し d_0 は $\boldsymbol{R}$ の離散距離，すなわち，

$$d_0(x,y) = \begin{cases} 0 \ (x = y) \\ 1 \ (x \neq y) \end{cases}$$

である，とする．どんな写像 $f: M_0 \to M$ も連続であることを示せ．M から M_0 への連続な単射は存在しないことを示せ．

A または B の距離をかえても，A から B への連続写像の全体は変らないことがしばしばある．例えば次の問題をみてみよう．

1.6 問　題

(a) A, B をそれぞれ距離 d, d_B をもつ距離空間とする．d_r を問題 1.3(d) で与えられた距離 (i.e., $d_r(x,y) = rd(x,y)$) とする．f を A から B への写像とする．このとき，f が A の距離 d に関して連続となる為の必要十分条件は f が A の距離 d_r に関して連続となることである．このことを証明せよ．

(b)　(a)と同じであるが，d_r を問題 1.3(e) の距離 d' でおきかえた場合.

このようなわけで，距離は写像が連続であるかどうかを判定する為の本質的に重要な規準とはならない．重要な意味をもつのは開集合の概念なのである.

1.7　定　義

距離空間 (A, d) の部分集合 U が**開である**または**開集合**であるとは，すべての点 $x \in U$ に対して，$\varepsilon_x > 0$ が存在して，$y \in A$ かつ $d(y, x) < \varepsilon_x$ のとき，$y \in U$ となるときをいう.

いいかえれば，すべての点 $x \in U$ について，$\varepsilon_x > 0$ が存在して，

$$B_{\varepsilon_x}(x) = \{y \in A\ ;\ d(y, x) < \varepsilon_x\} \subseteq U$$

となるとき，U は開集合とよばれるのである.

$\boldsymbol{R}$ の開集合の 1 つの例は $(0, 1) = \{x \in \boldsymbol{R}\ ;\ 0 < x < 1\}$ である．$\boldsymbol{R}^2$ では次のものは開集合である：

$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 < 1\},\quad \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 > 1\},$$
$$\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\ ;\ 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

1.8　問　題

(a)　すべての $x \in A, \varepsilon > 0$ に対し，$B_\varepsilon(x) = \{y \in A\ ;\ d(x, y) < \varepsilon\}$ は常に開集合であることを示せ.

(b)　$\boldsymbol{R}^2$ の次の部分集合の中で，どれが(通常の距離について)開であるか？

$\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}$，$\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1\}$，

$\{(x, y)\ ;\ |x| < 1\}$，$\{(x, y)\ ;\ x + y < 0\}$，

$\{(x, y)\ ;\ x + y \geq 0\}$，$\{(x, y)\ ;\ x + y = 0\}$.

(c)　$\mathcal{F}$ をある距離空間 (A, d) の開集合の全体とする．次を示せ.

(i)　空集合 $\varnothing$ と全集合 A は $\mathcal{F}$ に属する，

(ii)　$\mathcal{F}$ の 2 つの交わりは $\mathcal{F}$ に属する，

(iii)　$\mathcal{F}$ のかってな部分集合族の和集合は $\mathcal{F}$ に属する.

(d)　$\boldsymbol{R}$(通常の距離をもつ)の開集合の無限個の集まりで，その交わりが開でないような例を与えよ.

開集合という概念を使用すると，次の決定的な結果がえられる．

1.9 定　理

2つの距離空間の間の写像 $f: M_1 \to M_2$ が連続である為の必要十分条件は M_2 のかってな開集合 U に対して，集合 $f^{-1}(U)$ が M_1 の開集合となることである．

この結果は，f が連続である為には，開集合の f による逆像が開であることが必要十分であるといっている．開集合の f による像が開集合であるということには何らふれていないことに注意する．

証明　d_1, d_2 をそれぞれ M_1, M_2 の距離とする．f が連続であり，U が M_2 の開集合であるとする．$x \in f^{-1}(U)$ とすれば，$f(x) \in U$ である．ところで，U は開であるから，$\varepsilon > 0$ が存在して，$B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$ となる．f の連続性によって，$\delta > 0$ が存在して，

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon,$$

いいかえれば，$f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$，すなわち $B_\delta(x) \subset f^{-1}(U)$ となる．このことがすべての点 $x \in f^{-1}(U)$ に対し成立するから，$f^{-1}(U)$ は M_1 の開集合であることになる．

逆に，$x \in M_1$ とすれば，すべての $\varepsilon > 0$ に対して $B_\varepsilon(f(x))$ は M_2 の開集合で，$f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ は M_1 の開集合となる．ところがこのことは，$x \in f^{-1}(B_\varepsilon(f(x))$ だから，ある $\delta > 0$ が存在して $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(f(x)))$，すなわち $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(f(x))$ となることを意味している．いいかえれば，$\delta > 0$ が存在し，$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ を意味している．すなわち，f は M_1 の各点 x で連続であり，連続写像となる．

この定理は，とくに，もし2つの距離が同じ開集合の族をひきおこすならば，1つの距離で連続な写像は自動的にもう1つの距離を使用しても連続であるということを教えてくれる．したがって，問題1.6は「d, d_r, d' が同じ開集合族をひきおこすことを示しなさい」といいかえることができる．

1.10 問　題

$\boldsymbol{R}^n$ の距離 $d(x, y) = \sum |x_i - y_i|$,　$d(x, y) = \max |x_i - y_i|$ の各々は $\boldsymbol{R}^n$ の

通常の距離からひきおこされるものと同じ開集合族をひきおこすか？

以上学んだことから，距離空間の間の連続性を研究するうえで重要なのは，各距離空間における開集合の全体のなす族であり，距離それ自身ではないことがわかる．このことは次のような考え方へ導いてくれる：集合 X が与えられたとき，X の部分集合の１つの族 $\mathscr{F}$ をえらんで，その元である X の部分集合を開集合と呼ぶことにする．これは集合 X とその部分集合族を一緒にした対象 $(X,\mathscr{F})$ を与える．そのような対象 $(X,\mathscr{F})$, $(Y,\mathscr{F}')$ の間の連続性を，つまり，写像 $f:X\to Y$ が連続であることを，$U\in\mathscr{F}'\Rightarrow f^{-1}(U)\in\mathscr{F}$ となることで定義する．もしも，$\mathscr{F}$ としてかってな族を許すとすれば，当然であるが，いかなる興味のある数学もえられないであろう．それゆえ，“開集合”の族 $\mathscr{F}$ はある単純な規則：距離空間から生ずる開集合族 $\mathscr{F}$ がそれに準ずるような規則(問題 1.8 (c))をみたすことを要請する．それらは次のようなものである．

(i)　(便宜的に)空集合 $\emptyset$ と全集合は $\mathscr{F}$ に属する，

(ii)　$\mathscr{F}$ の２つの元の交わりは $\mathscr{F}$ に属する，

(iii)　$\mathscr{F}$ の任意の元の集まりの和集合も $\mathscr{F}$ に属する．

この章の最初のところで言及した X に関する“構造”とは，単純であるが以上の３性質をみたす X の部分集合の族 $\mathscr{F}$ のことなのである．これはトポロジーの出発点である．

2

位相空間

位相空間とは，集合と３つの性質をみたすある部分集合(開集合とよばれる)の族を一緒にしたものに他ならない．

2.1 定　義

X を集合とし $\mathscr{U}$ を次をみたす X の部分集合の集まりとする：

(i)　$\emptyset \in \mathscr{U}$, $X \in \mathscr{U}$

(ii)　$\mathscr{U}$ の２つの元 U, V の交わり $U \cap V$ は $\mathscr{U}$ に属する，

(iii)　$\mathscr{U}$ の元のいかなる集まり(つまり，$\mathscr{U}$ の任意の部分集合) $\{U_i \in \mathscr{U}\,;\, i \in I\}$ の和集合 $\bigcup_{i \in I} U_i$ も $\mathscr{U}$ に属する．

このような X の部分集合族 $\mathscr{U}$ は X の**位相**と呼ばれる．集合 X と $\mathscr{U}$ を一緒にして**位相空間**といい，$(X, \mathscr{U})$ と表わしたり，また，しばしば T またはただ X と略記することがある．元 $U \in \mathscr{U}$ を T の**開集合**という．X の元は T の**点**とよばれる．

条件(ii)より $\mathscr{U}$ の有限個の元の交わりが $\mathscr{U}$ に属することに注意する．$\mathscr{P}(X)$ で X のすべての部分集合の族を表わせば，X の位相とは条件(i), (ii)及び(iii)をみたす $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{P}(X)$ の１つの選択に他ならない．異なる選択は X の異なる位相を与える．

位相空間の多くの例を知るのは重要である．最初の例は，前章から直ちにわかるように，どんな距離空間も位相空間をひきおこすということで与えられる．この位相空間は**距離位相**または**通常の位相**をもつといわれる．この逆は成立しない――すなわち，距離空間からひきおこされることのない位相空間が存在す

る——問題 2. 2(c) をみよ．距離空間から生ずる位相空間は**距離づけ可能である**といわれる．2つの異なる距離空間が同じ位相空間をひきおこすことがあるということに注意する．

位相の条件をみたす X の部分集合族の極端な場合を考えると次の2つの例がえられる．最初のものは，$\mathcal{U}=\{\emptyset, X\}$ である；これがどんな集合 X に対してもその1つの位相を与えることはあたりまえであり，X の**自明な位相**と呼ばれる．もう1つの極端な例は $\mathcal{U}$ を X のすべての部分集合の族 $\mathcal{P}(X)$ とするものである；これは明らかに X の位相を与え，X の**離散位相**と呼ばれる．

2.2 問　　題

(a) X が離散位相をもてば距離づけ可能である(ヒント：離散距離を考えよ)．

(b) X を距離づけ可能な位相空間とする．X の異なる2点 a, b に対して，a と b をそれぞれ含んだ開集合 U_a と U_b が $U_a \cap U_b = \emptyset$ となるように存在することを示せ．

(c) (b)を使用して，もし X が少なくとも2点をもち，自明な位相をもつとき，それは距離づけ可能でないことを示せ．

集合 X に対する位相の1つの興味ある例として**有限補位相** $\mathcal{U}$ が知られている．ここで，$\mathcal{U}$ は $\emptyset, X$ そしてその補集合が有限集合であるような X の部分集合からなるものである．勿論，X 自身が有限であれば，この位相は X の離散位相に他ならない．X が無限集合であれば，その族 $\mathcal{U}$ が位相の条件をみたすのを検証しなくてはならない．第一条件は自明にみたされている．第二条件については，$U_1, U_2 \in \mathcal{U}$，したがって，$X-U_1$, $X-U_2$ が有限であるとする．このとき，$(X-U_1) \cup (X-U_2)$ も有限であるが，しかし，これは $X-(U_1 \cap U_2)$ に等しい，すなわち $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ である．第三条件をみる為には $X-(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J}(X-U_j)$ という事実を使用すればよい．

X が2点 $\{a, b\}$ からなるとき，X には4つの異なる位相が存在する，すなわち

$$\mathcal{U}_1 = \{\emptyset, X\}\ ;\ \mathcal{U}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}\ ;\ \mathcal{U}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}\ ;$$
$$\mathcal{U}_4 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.$$

$\mathcal{U}_1$ と $\mathcal{U}_4$ が位相であることはすでにみたが，$\mathcal{U}_2$ と $\mathcal{U}_3$ が位相であることの検証は読者にまかせる．$(X, \mathcal{U}_2)$ 及び $(X, \mathcal{U}_3)$ は距離づけ可能でないことに注意する．

位相空間の他の諸例が次の問題で与えられる．

2.3 問　　題

以下の各場合 (a), (b), (c) において，$\mathcal{U}$ は X の位相であることを示せ．

(a) $X=\boldsymbol{R}$, $\mathcal{U}=\{\emptyset\}\cup\{\boldsymbol{R}\}\cup\{(-\infty, x)\ ;\ x\in\boldsymbol{R}\}$.

(b) $X=\boldsymbol{N}=$自然数の全体，$\mathcal{U}=\{\emptyset\}\cup\{\boldsymbol{N}\}\cup\{O_n\ ;\ n\geq 2\}$，但し，$O_n=\{n, n+1, n+2, \cdots\}$.

(c) $X=\boldsymbol{R}$, $U\in\mathcal{U}\Leftrightarrow U\subseteq\boldsymbol{R}$ かつ各 $s\in U$ に対し，ある $t>s$ が存在して $[s, t)\subseteq U$，但し $[s, t)=\{x\in\boldsymbol{R}\ ;\ s\leq x<t\}$.

(d) 3 個の元からなる集合の異なる位相の個数を決定せよ．

(e) 以下の $\boldsymbol{R}$ の部分集合の族はいずれも位相でないことを示せ．

$\mathcal{U}_1=\{\emptyset\}\cup\{\boldsymbol{R}\}\cup\{(-\infty, x]\ ;\ x\in\boldsymbol{R}\}$,

$\mathcal{U}_2=\{\emptyset\}\cup\{\boldsymbol{R}\}\cup\{(a, b)\ ;\ a, b\in\boldsymbol{R}, a<b\}$.

位相空間 X のどんな部分集合 Y に対しても Y に含まれる最大の開集合に注目することができる．これは $\mathring{Y}$ と表わされ，Y の**内部**または**開核**と呼ばれる．いいかえれば，

$$\mathring{Y}=\bigcup_j U_j$$

但し $\{U_j\ ;\ i\in J\}$ は Y に含まれるすべての開集合の族である．

明らかに，$x\in\mathring{Y}\Leftrightarrow$開集合 $U\subseteq Y$ で $x\in U$ となるものが存在する．

例えば I^n を $\boldsymbol{R}^n$ の次のような部分集合とする：

$$I^n=\{x=(x_1, \cdots, x_n)\in\boldsymbol{R}^n\ ;\ 0\leq x_i\leq 1,\ i=1, \cdots, n\}.$$

$\boldsymbol{R}^n$ が通常の位相 $\left(\text{i.e., 通常の距離 } d(x, y)=\left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{1/2} \text{ による距離位相}\right)$ をもつとすれば，I^n の内部は

$$\mathring{I}^n=\{x\ ;\ 0<x_i<1,\ i=1, 2, \cdots, n\}$$

である．このことをみるのに，$x\in\mathring{I}^n$ とし $\varepsilon=\min\{1-x_i, x_i\ ;\ i=1, 2, \cdots, n\}$ とする．x を中心として半径 ε の開球 $B_\varepsilon(x)$ (i.e., $\{y\in\boldsymbol{R}^n\ ;\ d(x, y)<\varepsilon\}$) は $\mathring{I}^n$ に含まれ，したがって $\mathring{I}^n$ は開である．一方，ある i に対し，$x_i=1$ または 0 であれ

ば，x のまわりの半径 ε の開球 $B_\varepsilon(x)$ は ε がどんなに小でも I^n に属さぬ点を含んでいる．よって，そのような点は I^n の内部に属さない．

開集合の補集合は特別な名称が与えられている．

2.4　定　義

位相空間 X の部分集合 C が**閉である**あるいは**閉集合**であるとは，X-C が開であるときをいう．

次の結果は，交わりの補集合と和集合の補集合に関する集合論的結果から容易に導かれる．

2.5　定　理

(i)　$\emptyset, X$ は閉である，

(ii)　2 つの閉集合の和集合は閉である，

(iii)　かってな閉集合の族 $\{C_i\,;\, i\in I\}$ の交わり $\bigcap_{i\in I} C_i$ も閉である．

閉集合という概念を位相空間を定義する為に使用することができる．

2.6　問　題

(a)　X を集合とし $\mathcal{V}$ を X の部分集合の族で次の条件をみたすとする．

　(i)　$\emptyset, X\in\mathcal{V}$,

　(ii)　$\mathcal{V}$ の 2 つの元の和集合は $\mathcal{V}$ に属する，

　(iii)　$\mathcal{V}$ のかってな元の集まりの交わりは $\mathcal{V}$ に属する．

　$\mathcal{U}=\{X-V\,;\, V\in\mathcal{V}\}$ は X の位相であることを示せ．

(b)　離散位相空間では各部分集合は同時に開であり閉であることを示せ．

(c)　位相空間が有限個の点からなり，各点が閉であれば，その位相は離散位相であることを示せ．

(d)　$\mathcal{U}$ を問題 2.3(c) で定義されたものとすれば，位相空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{U})$ では，各 $[s, t)$ は開かつ閉であることを示せ．

位相空間 X のいかなる部分集合 Y に対しても，Y を含む最小の閉集合が考えられる；これは $\overline{Y}$ と表わされ，Y の**閉包**と呼ばれる．いいかえれば，

$$\overline{Y} = \bigcap_{j\in J} F_j$$

但し $\{F_j\,;\,j\in J\}$ は Y を含むすべての閉集合の族である．Y に属さない $\overline{Y}$ の点はしばしば Y の集積点と呼ばれる．次の結果は $\overline{Y}$ のもう１つの述べ方を与える．

2.7 補　題

$x\in\overline{Y}\Leftrightarrow x$ を含むどんな開集合 U に対しても $U\cap Y\neq\emptyset$.

証明　$x\in\overline{Y}$ とし，x を含む開集合 U で $U\cap Y=\emptyset$ をみたすものが存在したとする．そのとき，$X-U$ は閉であり，$Y\subseteq X-U$ より $\overline{Y}\subseteq X-U$ となる．しかし，$x\in\overline{Y}$ と $x\in U$ は矛盾である．

逆に，$x\notin\overline{Y}$，したがって，$x\in X-\overline{Y}$ であったとする．ところが，$X-\overline{Y}$ は開であり，$(X-\overline{Y})\cap\overline{Y}=\emptyset$ より，$(X-\overline{Y})\cap Y=\emptyset$ となる．すなわち，x を含む開集合 $U=X-\overline{Y}$ で，$U\cap Y=\emptyset$ となるものが存在する．▌

$\boldsymbol{R}$ が通常の位相をもつとすれば，区間 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ 及び $[a,b]$ の閉包は $[a,b]$ である．

2.8 問　題

(a)　X を通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}$ とする．X の次の各部分集合の閉包をみつけよ．

$A=\{1,2,3,\cdots\}$，$B=\{x\,;\,x$ は有理数$\}$，

$C=\{x\,;\,x$ は無理数$\}$.

(b)　X を問題 2.3(c) の位相をもつ $\boldsymbol{R}$ とする．X の次の各部分集合の閉包をみつけよ．

(a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $[a,b]$.

集合の閉包についてのより多くの性質が次の問題で与えられている．

2.9 問　題

次のことを証明せよ．

(a)　Y が位相空間 X の部分集合で $Y\subseteq F\subseteq X$ であり，F が閉であれば $\overline{Y}\subseteq F$ である．

(b)　Y が閉である $\Leftrightarrow Y=\overline{Y}$.

(c) $\overline{\overline{Y}}=\overline{Y}$

(d) $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$, $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cap\bar{B}$.

(e) $X-\mathring{Y}=\overline{X-Y}$

(f) $\overline{Y}=Y\cup\partial Y$, 但し　$\partial Y=\overline{Y}\cap(\overline{X-Y})$　(∂Y は Y の**境界**と呼ばれる).

(g) Y が閉である$\Leftrightarrow\partial Y\subseteq Y$.

(h) $\partial Y=\emptyset\Leftrightarrow Y$ が開かつ閉である.

(i) $\partial(\{x\in\boldsymbol{R}\ ;\ a<x<b\})=\partial(\{x\in\boldsymbol{R}\ ;\ a\leq x\leq b\})=\{a,b\}$.

(j) Y がある開集合の閉包である$\Leftrightarrow Y$ がその内部の閉包である.

一点の"近傍"の概念がこれからよく使用される.

2.10 定　義

X を位相空間とする．部分集合 $N\subseteq X$ が点 $x\in N$ の近傍であるとは $x\in U\subseteq N$ をみたす開集合 U が存在するときをいう.

とくに，開集合はそれ自身その各点の近傍である．より一般に，$\mathring{A}\neq\emptyset$ である集合 A は A の内部 $\mathring{A}$ の各点の近傍である．近傍の簡単な性質が次の問題で与えられている(次の問題における結果を位相を定義する為に使える).

2.11 問　題

X を位相空間とする．次のことを証明せよ.

(i) 各点 $x\in X$ に対し，少なくとも 1 つ x の近傍が存在する.

(ii) N が x の近傍であり，$N\subseteq M$ であれば M もまた x の近傍である.

(iii) M と N が x の近傍ならば，$N\cap M$ もそうである.

(iv) 各点 $x\in X$ 及び x の各近傍 N に対し，x の近傍 U が存在して，$U\subseteq N$ かつ U が U の各点の近傍となる.

3

連続写像

3.1 定　義

2 つの位相空間の間の写像 $f: X \to Y$ が**連続であるとは**，Y のどのような開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ も X の開集合となるときをいう．

連続写像のきわめてあたりまえな例に，恒等写像 $1_X: X \to X$ や X のすべての点を Y の 1 つの点 y_0 にうつす定値写像 $y_0: X \to Y$ がある．

X が離散位相を有するとき，いかなる位相空間 Y への写像 $f: X \to Y$ も連続である．このことは Y のかってな部分集合の逆像が X で開であることから明らかである．もう一方では，Y が自明な位相をもつとすればいかなる位相空間 X からの写像 $f: X \to Y$ も連続である；これは容易にわかる．実際，すぐ後の問題で与えられるように，これらの 2 つの例についてはその逆が成立している．

次に連続でない写像の例を与える．$X=(\boldsymbol{R}, \mathcal{U})$, 但し $\mathcal{U}=\{\emptyset\} \cup \{\boldsymbol{R}\} \cup \{(-\infty, x)\,;\, x \in \boldsymbol{R}\}$ とし，$f: X \to X$ が $f(x)=x^2$ で与えられているとする．この写像 f は連続ではない．なぜなら，$f^{-1}((-\infty, y^2))=(-y, y)$ であり，これは $\mathcal{U}$ に属さないから．X から X へのどのような写像が連続であるかは練習問題として残しておく（問題 3.2(d)）．

3.2 問　題

(a) X をかってな集合とし，$\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ を X の位相とする．このとき恒等写像 $1_X: (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{U}')$ が連続 $\Leftrightarrow \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ が成り立つことを証明せよ．

(b) X が，任意の位相空間 Y へのいかなる写像 $f: X \to Y$ も連続となるような位相空間であるとする．このとき X は離散位相をもつことを

証明せよ(ヒント：Y を離散位相をもつ X とせよ).

(c) Y が位相空間で，任意の位相空間 X からのいかなる写像 $f: X \to Y$ も連続になるという性質をもつとする．このとき Y は自明な位相をもつことを証明せよ(ヒント：X を自明な位相をもつ Y とせよ).

(d) X を実数の集合 $\boldsymbol{R}$ で位相 $\{\emptyset\} \cup \{\boldsymbol{R}\} \cup \{(-\infty, x)\ ;\ x \in \boldsymbol{R}\}$ をもつとする．写像 $f: X \to X$ が連続である為の必要十分条件は f が単調増加(すなわち，$x > x'$ ならば $f(x) \geqq f(x')$) であり，右連続(すなわち，すべての $x \in X$ 及びすべての $\varepsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ が存在して，$x \leq x' < x + \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$ となる)ことであることを証明せよ．

閉集合による連続写像の特徴づけも存在する．

3.3 定　　理

位相空間 X, Y の間の写像 $f: X \to Y$ が連続である為の必要十分条件は Y のすべての閉集合 C の逆像 $f^{-1}(C)$ が X の閉集合となることである．

証明　f が連続であるとする．C が Y で閉であれば，$Y-C$ は開であり，したがって $f^{-1}(Y-C)$ は開である．ところが $f^{-1}(Y-C) = X - f^{-1}(C)$ であり，したがって，$f^{-1}(C)$ は閉である．逆を示すのに，U が Y で開とする．そのとき，$Y-U$ は閉であり，よって $f^{-1}(Y-U) = X - f^{-1}(U)$ は閉，このことは $f^{-1}(U)$ が開であることを意味していて，f は連続である．▌

開集合を開集合にうつす写像は**開写像**であると呼ばれる．開写像は必ずしも連続ではない．例えば，Y を 2 点からなる $\{a, b\}$ で，離散位相をもつとし，X を通常の位相をもつ実数全体 $\boldsymbol{R}$ とする．写像 $f: X \to Y$ を

$$f(x) = \begin{cases} a & (x \geq 0), \\ b & (x < 0) \end{cases}$$

と定義する．この写像 f は開写像であるが，$f^{-1}(\{a\})$ が X で開ではないから連続ではない．位相空間から離散空間へのどんな写像も必ず開写像である．

写像 $f: X \to Y$ が**閉写像**であるとは，任意の閉集合の f による像が閉集合となるときをいう．閉写像は必ずしも連続ではない；実際，連続でない開写像である先の例は閉写像でもある．一般に，連続写像は(i)開でも閉でもない，(ii)開であるが閉でない，(iii)閉であるが開でない，あるいは(iv)開であり閉でも

ある，ことがありうる．次のような例がある．(i) X は離散位相をもつ集合 A, Y は自明な位相をもつ集合 A, f は恒等写像である．(ii) $X=\{a,b\}$ で離散位相をもつとし，$Y=\{a,b\}$ で位相 $\{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$ をもつとする．そのとき $a\in Y$ への定値写像 $a: X\to Y$ は開かつ連続であるが，閉写像ではない．(iii) $X=\{a, b\}$ で離散位相をもつとし，$Y=\boldsymbol{R}$ で通常の位相をもつとする．このとき写像 $f: X\to Y$ を $f(a)=0$, $f(b)=1$ と定めれば，連続かつ閉であるが開ではない．(iv) については，$X=Y$ をかってな位相空間とし，f を恒等写像とすればよい．勿論，さらに f に制限をつければ，4つの場合のすべてが生ずるわけではない．

3.4 問　題

f を位相空間 X と Y の間の連続写像 $f: X\to Y$ とする．f が (a) 単射である，(b) 全射である，(c) 全単射である，という条件のもとに，4つの場合，(i) f が開でも閉でもない，(ii) f が開であるが閉でない，(iii) f が閉であるが開でない，(iv) f が開かつ閉である，のいずれが実際に起りうるか？

次の結果は2つの連続写像の合成は連続であることを教えてくれる．証明は驚くほど簡単である．

3.5 定　理

X, Y 及び Z を位相空間とする．もし，$f: X\to Y$ 及び $g: Y\to Z$ が連続なら，合成 $h=gf: X\to Z$ も連続である．

証明　U が Z で開であれば，$g^{-1}(U)$ は Y で開であり，したがって $f^{-1}(g^{-1}(U))$ は X で開である．ところが，$(fg)^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$ である．

次の定義はいつ2つの位相空間は同型；同相という言葉を使う，であるかを教えている．

3.6 定　義

X と Y を位相空間とする．X と Y が**同相**であるとは，互いに逆写像である連続写像 $f: X\to Y$, $g: Y\to X$ (すなわち，$fg=1_Y$, $gf=1_X$ かつ f, g は連続) が存在するときをいう．$X\cong Y$ と書き，f と g を X と Y の間の**同**

相写像という．

同値な定義は，(i)全単射，(ii)連続かつ(iii)その逆写像 f^{-1} がまた連続である写像 $f: X \to Y$ の存在を要請することである．したがって，X と Y の間の同相写像とは，X と Y の点及び開集合の間の全単射のことである．

同相写像のいくつかの例が第1章から直ちにえられる．例えば，X が距離 d をもつ距離空間 M から生じたものであり，Y が $d'(x,y)=\dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ で定義された距離 d' をもつ距離空間としての M から生じたものであるとすれば，X と Y は同相である．もう1つの例は，X を通常の距離位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$, Y を距離 $d(x,y)=\max|x_i-y_i|$ からえられる距離位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ とすればよい．再び X と Y は同相である．他方では，$X=\boldsymbol{R}^n (n \geq 1)$ で通常の位相をもつとし，$Y=\boldsymbol{R}^n$ で離散位相をもつとすれば，X と Y は同相でない．

3.7 問　　題

(a) 位相空間 X, Y 及び連続な全単射 $f: X \to Y$ で，f^{-1} が連続とならない例を与えよ．

(b) X と Y を位相空間とする．X と Y が同相である為の必要十分条件は，写像 $f: X \to Y$ で次をみたすものが存在することであることを証明せよ．(i) f は全単射であり，(ii) X の部分集合 U が開である必要十分条件は $f(U)$ が開である．

(c) 集合 Y の2つの距離 d_1, d_2 が正数 m, M に対し，

$md_1(y,y') \leq d_2(y,y') \leq Md_1(y,y') \quad (y, y' \in Y)$

をみたすとする．これらの距離から生ずる位相空間は同相であることを証明せよ(ヒント：Y の恒等写像を考えよ)．

(d) X を位相空間とし，$G(X)$ を同相写像 $f: X \to X$ の全体のなす集合とする．$G(X)$ は合成に関し群であることを証明せよ．$x \in X$ に対し，$G_x(X)=\{f \in G(X)\,;\, f(x)=x\}$ とする．$G_x(X)$ は $G(X)$ の部分群であることを証明せよ．

同相は同値関係であり，そして，トポロジーとはその同値類の研究なのである．次の3つの章で，知られた位相空間から新しい位相空間をつくり出す方法について述べよう．

4

誘導位相

Sを位相空間Xの部分集合とする．Sの1つの位相がXの位相から与えられる．

4.1 定　義

Xの位相からSに**誘導された**位相とはXの開集合Uに対し，$U\cap S$の形のSの部分集合の族である．

いいかえれば，$\mathcal{U}$がXの開集合の族であれば，$\mathcal{U}_S=\{U\cap S\,;\,U\in\mathcal{U}\}$が$S$の開集合の族であるということである．$\mathcal{U}_S$が$S$に位相を与えることを証明するには，位相に対する条件を検証しなくてはならない．$\emptyset=\emptyset\cap S$, $S=X\cap S$であるから，ただちに最初の条件はみたされる．第2の条件を示すのに，$U_1\cap S$と$U_2\cap S$を$\mathcal{U}_S$の2つの元とする．このとき，$(U_1\cap S)\cap(U_2\cap S)=(U_1\cap U_2)\cap S$であるから，これは$\mathcal{U}_S$に属している．最後に，$\{U_j\cap S\,;\,j\in J\}$を$\mathcal{U}_S$からかってにとった元の集合とすれば，$\bigcup_{j\in J}(U_j\cap S)=(\bigcup_{j\in J}U_j)\cap S$は$\mathcal{U}_S$に属している．

誘導位相は，ときには**相対位相**と呼ばれる．Xの部分集合Sが誘導位相をもつとき，SはXの**部分空間**であるという．

例えば，(通常の位相をもつ)$\boldsymbol{R}$の部分集合$[a,b]$をとり，これに誘導位相を与えるならば，次の集合

$$[a,c),\quad a<c<b,$$
$$(d,b],\quad a<d<b,$$
$$(d,c),\quad a\leq d\leq c\leq b,$$

は$[a,b]$の開集合である．注意しなくてはならないのは，Uが$[a,b]$で開であることは必ずしもUが$\boldsymbol{R}$で開であることを意味していないということである．

もう1つの例として，$\boldsymbol{R}^2$ の単位円周 S^1 に $\boldsymbol{R}^2$ の通常の位相による誘導位相を与えることができる．このとき S^1 の開集合とは，“開いた弧”（すなわち，弧からその両端点を除いたもの）の和集合のことである．さらに一般に，標準 n-球面 S^n，但し

$$S^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\, \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 = 1\}$$

に，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の通常の位相によって誘導位相を与える．

$\boldsymbol{R}^{n+1}$ において，$x_{n+1}=0$ によって与えられる部分集合 S が考えられる．もし，S に誘導位相を（$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の通常の位相を使って）与えるならば，S は $\boldsymbol{R}^n$ に同相である．この証明は問題として残しておく；また，6章をみよ．

$\boldsymbol{R}^3$ の部分集合をみて，どれが互いに同相になるかをみつけるのは面白い図形遊びである．例えば，$\boldsymbol{R} \subset \boldsymbol{R}^3$ の中の区間 $[a, b]$ と $[c, d]$ は同相である．同相写像 $f : [a, b] \to [c, d]$ は次式で与えられる．

$$f(x) = c + (d-c)\cdot(x-a)/(b-a).$$

逆写像 f^{-1} を構成し，f 及び f^{-1} が連続であることを示すのは難しくない（問題 4.5(g) をみよ）．直観的には，区間を一方から他方へ縮めたりあるいは伸ばしたりすればよいのである．

もう1つの例として，円周と4角形をみてみよう．（4角形とは，その辺のなす“ふち”の部分を意味するものとする）；図 4.1 参照．x_i から x_{i+1} への S^1 上の区間を y_i から y_{i+1} への4角形上の区間（辺）へうつす写像は円周から4角形への同相写像を定義する．円周を $\{(x, y)\,;\, x^2+y^2=1\}$，4角形を $\{(x, y)\,;\, x=\pm 1, -1 \leq y \leq 1$ または，$-1 \leq x \leq 1, y=\pm 1\}$ と表わせば，具体的に同相写像が次のように与えられる．

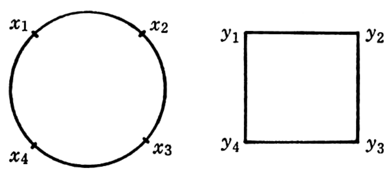


図 4.1

円周 → 4角形	4角形 → 円周
$(x, y) \to (x/m, y/m)$	$(x, y) \to (x/r, y/r)$

但し，$m = \max(|x|, |y|)$ であり $r = \sqrt{x^2+y^2}$ である．視覚的には4角形をつくるのに円周をひねったり，折り曲げたりすればよい．一般に，$\boldsymbol{R}^3$（または $\boldsymbol{R}^2$）

の２つの部分空間があれば，ひねったり，折り曲げたり，のばしたりあるいはちぢめたりして一方を他方にうつせればそれらは同相である．但し，点同志をつなげたり，また，切ったりしてはいけない．そういうわけで，たとえばドーナツ(1 つの穴があいた形のもの)はティーカップ(1 つの把手をもつもの)と同相である；図 4.2 をみよ．

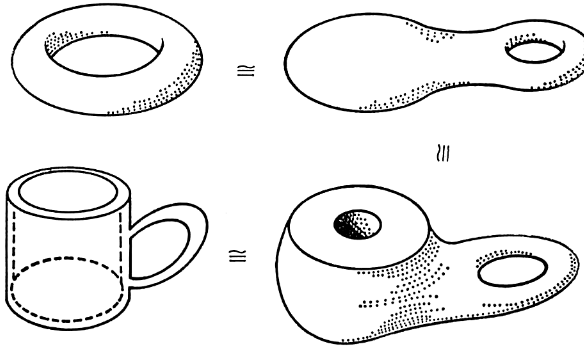


図 4.2

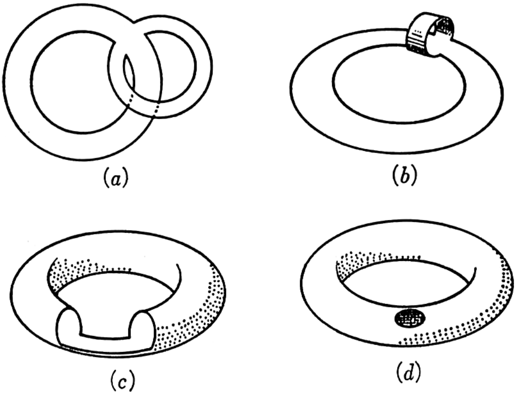


図 4.3

同相な空間のもう１つの例が図 4.3(a)と(d)で与えられている．図 4.3(b)と(c)はその中間段階での同相な空間である．

もし同相写像 $h: X \cong Y$ があれば，どのような点 $x \in X$ についても，空間 $X - \{x\}$ と $Y - \{h(x)\}$ は同相である．このことが，ときに，ある空間同志が同相

でないことを示す方法を与えてくれる．例えば，この段階で少なくとも視覚的には $\boldsymbol{R}$ の部分空間 $[0,1]$ と $(0,1)$ は同相でないことがわかる．なぜなら，$[0,1]$ から 0 を除けば，$(0,1]$ をうるが，(視覚的には)これは 1 つにつながったままである．他方，$(0,1)$ はそのどんな点をとり去っても，その結果(視覚的に) 2 つに切りさかれてしまう；より正確には，それが互いに交わらない空でない 2 つの開集合の和集合となる．ところが(視覚的に) 1 つにつながったものは 2 つにさかれたものと同相にならない(切りひらくことが必要になり，この変形は連続でない)．そういうわけで，$[0,1]$ と $(0,1)$ は同相でありえないのである("1 つにつながったもの" とか "2 つにさかれたもの" というような概念は 9 章で正確に定式化される)．上の考え方は 2 つあるいはそれ以上の点について拡張できる．諸君は次の訓練を行うことで，このような考え方をもう少し手探りすることができるだろう．

4.2 同相写像に関する視覚的訓練

図 4.4 における $\boldsymbol{R}^3$ (及び $\boldsymbol{R}^2$) の部分空間を同相なもの同志にわけなさい．

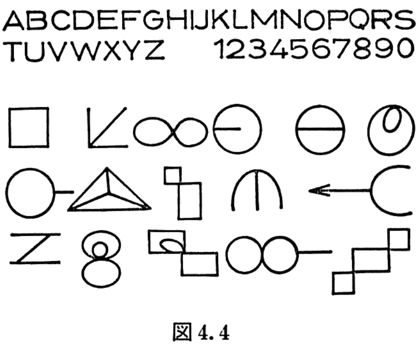


図 4.4

円周と $\boldsymbol{R}^3$ の中での結ばれた円周(図 4.5 をみよ)をみてみよう．容易に円周と結ばれた円周の間の同相写像がつくれる．そのアイデアは，各各をかりに 9 個の部分に分けて，x_i から x_{i+1} への円周上の区間を y_i から y_{i+1} への結ばれた円周上の区間へうつす，というものである．もし結ばれた円周が細いひもでできているならば，諸君は容易に気づくと思われるが，結ばれた円周を，ひねったり曲げたりして，切ることやつなげることをしないで，円周に変形す

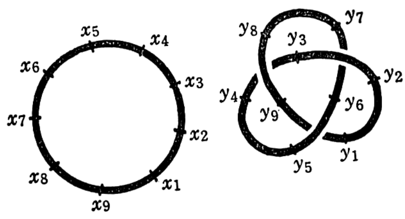


図 4.5

ることは不可能である．しかしながら，結ばれた円周を一時的に切り，結びをほどいて，再びつなぎ合わせれば円周がえられるのである．このことは，$\boldsymbol{R}^3$の部分空間の間の同相写像の我々の視覚的な認識の中で一時的に切りひらくことを許すように，変更をせまるものである．そのアイデアは，一時的に切りひらいて，その後(ひねったり，折りまげたりする)同相による変形を行い，そして，切りひらいたところを再びつなぎなおすというものである；最初と最後の空間はそのとき同相である．この考え方は，5章におけるように，商空間という概念を使用して定式化することが可能である．

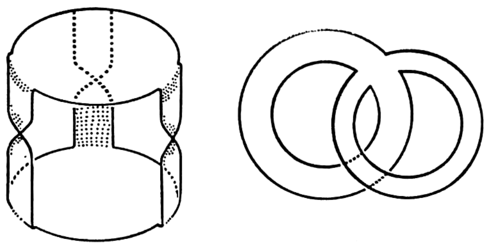


図 4.6

4.3 問　　題　図 4.6 に示される $\boldsymbol{R}^3$ の 2 つの部分空間が同相であることを示せ．一方の部分空間は，2 つの円板状の紙片に 3 つのねじられた帯をはりつけてえられている．もう 1 つのものは，2 つの長い紙の帯を交叉させ，はりつけてえられている(ヒント：最初のものを 2 箇所で，すなわち 2 つのねじれている帯を切りひらき，それからひろげて，最後に，切ったところをもとどおりにはり合わせよ)．

すでに述べたように，S が X の部分空間のとき，S の開集合は必ずしも X の開集合ではない．しかしながら，S が X で開であれば，S の開集合は X の開集合でもある．

4.4 補　　題

(i)　S が X で開であれば，S の誘導位相での開集合は X で開である．

(ii)　S が X で閉であれば，S の誘導位相での閉集合は X で閉である．

証明　(i)及び(ii)は殆んど同じであるから，(i)だけ証明しよう．S が X で開であるとし，U を S の開集合とする．定義により，X のある開集合 V によ

り，$U=V\cap S$ となる．ところが，S は X で開だから，$U=V\cap S$ も X で開である．▌

4.5 問　題

(a) Y が X の部分空間であり，Z が Y の部分空間であれば，Z は X の部分空間であることを示せ．

(b) 距離づけ可能な空間の部分空間は距離づけ可能であることを証明せよ．

(c) S は X の部分空間とする．包含写像 $S\to X$ は連続であることを示せ．さらに，S が，包含写像 $S\to X$ が連続となるもっとも弱い(開集合が最小である)位相をもつことを示せ．

(d) X が位相空間，S が X の部分集合であり，$i:S\to X$ が包含写像を表わすとする．集合 S には，どのような空間 Y および写像 $f:Y\to S$ に対しても，

$f:Y\to S$ が連続 $\Leftrightarrow if:Y\to X$ が連続

となるような位相が与えられる．S のこの位相は X の位相から誘導された位相であることを証明せよ．

(e) Y を X の部分空間，A を Y の部分集合とする．$Cl_X(A)$ により，A の X における閉包そして $Cl_Y(A)$ により，A の Y における閉包を表わす．$Cl_Y(A)\subseteq Cl_X(A)$ を証明せよ．一般に，$Cl_Y(A)\neq Cl_X(A)$ を示せ．

(f) 通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}$ の部分集合 (a,b) は $\boldsymbol{R}$ に同相であることを示せ(ヒント：適当な c,d に対し，$x\mapsto\tan(\pi(cx+d))$ のような関数を使え)．

(g) X,Y を位相空間とし，S を X の部分空間とする．$f:X\to Y$ が連続写像であるならば，$f|S:S\to f(S)$ も連続であることを示せ．

(h) 通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}$ の部分空間 $(1,\infty),(0,1)$ は同相であることを示せ $\left(\text{ヒント：}x\mapsto\dfrac{1}{x}\right)$

(i) $S^n-\{(0,0,\cdots,0,1)\}$ は通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ に同相であることを証明せよ．(ヒント：$\varphi:S^n-\{(0,0,\cdots,0,1)\}\to\boldsymbol{R}^n$ を

$$\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$

そして，$\psi : \boldsymbol{R}^n \to S^n - \{(0, 0, \cdots, 0, 1)\}$ を

$$\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{1+\|x\|^2}(2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n, \|x\|^2-1)$$

と定義しなさい）.

(j) $\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ および S^n は通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間位相（＝誘導位相）をもつとする．$f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ によって定義された写像 $f : \boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$ は連続写像である.

5

商位相(そして空間に作用する群)

前章で考えたことは，本質的には集合 S，位相空間 X 及び S から X への単射であった．これは S の位相を与えた：誘導位相である．本章で考えるのは位相空間 X，集合 Y そして X から Y への全射である．これは Y 上の位相を与える：いわゆる“商”位相である．

5.1 定　　義

$f: X \to Y$ を位相空間 X から集合 Y の上への全射であるとする．Y の f に関する**商位相**とは次の部分集合族のことである．

$$\mathcal{U}_f = \{U\ ;\ f^{-1}(U) \text{ は } X \text{ で開である}\}.$$

$\mathcal{U}_f$ が位相としての条件をみたすのは容易に検証できる：当然，$\varnothing \in \mathcal{U}_f$ かつ $Y \in \mathcal{U}_f$ であり，他の条件は $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$ かつ $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$ という事実から導ける．Y に商位相を与えた後では，写像 $f: X \to Y$ は連続となることに注意する．

好適な例は，S^n の 2 点 $x, -x$ の順序づけられていない対 $\{x, -x\}$ の全体のなす集合 $\boldsymbol{RP}^n = \{\{x, -x\}\ ;\ x \in S^n\}$ である．当然，全射 $\pi: S^n \to \boldsymbol{RP}^n$ が $x \mapsto \{-x, x\}$ で与えられている．この写像 π に関する商位相をもつ $\boldsymbol{RP}^n$ は**実射影 $\boldsymbol{n}$-空間**と呼ばれる．

もう 1 つの例として，まず，誘導位相をもつ

$$C = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3\ ;\ x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$$

を考えよう (C は円筒である)．M を $\{p, -p\}$ の形の C の点の順序づけられていない対の集合とする．すなわち，

$$M=\{\{-p,p\}\ ;\ p\in C\}.$$

C から M へ自然な全射があるから，M に商位相を与えることができる．こうしてえられた位相空間はメービウスの帯またはメービウスバンドと呼ばれる．

写像 $f: M\to \boldsymbol{R}^3$ が $p=(x,y,z)\in C\subseteq \boldsymbol{R}^3$ に対し，

$$\{p,\ -p\}\mapsto((x^2-y^2)(2+xz),2xy(2+xz),yz)$$

で与えられるとする．f が単射であるのをみるのは難しくない．M の f による像 $f(M)$ は図 5.1 のように描かれる．実際，M は誘導位相をもつ $f(M)\subseteq \boldsymbol{R}^3$ に同相である：f が連続であるのは

$$F(x,y,z)=((x^2-y^2)(2+xz),2xy(2+xz),yz)$$

で定義される写像 $f: \boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ が連続であること及び商の普遍写像性(下の定理 5.2)より出る．f^{-1} が連続であることは読者が証明するように残しておこう；実は，8 章で証明される結果から容易に出る．

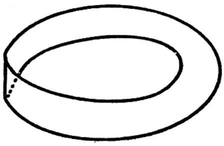


図 5.1

商の普遍写像性を定式化し，証明しよう．

5.2 定　理

$f: X\to Y$ を写像とし，Y は X の f に関する商位相をもつとする．このとき，Y から位相空間 Z へのある写像 $g: Y\to Z$ が連続であるための必要十分条件は gf が連続であることである．

証明　写像 $f: X\to Y$ は連続であり，したがって g も連続なら，合成 gf は連続である．逆に，gf が連続であるとしよう．もし V が Z で開であれば，そのとき，$(gf)^{-1}(V)$ も X で開である．つまり，$f^{-1}(g^{-1}(V))$ は X で開である．Y の商位相の定義により，$g^{-1}(V)$ は Y で開であり，したがって g は連続である．

5.3 問　題

(a)　写像 $f: X\to Y$ に関して Y に商位相が与えられているとする．Y は f が連続になるような最強(最大個数の開集合をもつ)位相をもっていることを証明せよ．

(b)　Y が写像 $f: X\to Y$ に関する商位相をもつとする．Y の部分集合 A

が閉である必要十分条件は $f^{-1}(A)$ が X で閉であることである．

(c) $f:\boldsymbol{R}\to S^1(S^1\subseteq\boldsymbol{R}^2)$ が次のように定義されているとする．
$f(t)=(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)\in\boldsymbol{R}^2$.
f によって定められる S^1 の商位相 $\mathcal{U}_f$ は $\boldsymbol{R}^2$ からの誘導位相 $\mathcal{U}$ に一致することを証明せよ (i.e., $(S^1,\mathcal{U}_f)\cong(S^1,\mathcal{U})$ を示せ)．

(d) X,Y,Z を位相空間とし，$f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ を全射とする．もし，Y,Z の位相がそれぞれ f,g によって定まる商位相であるならば，そのとき，Z の位相は $gf:X\to Z$ によって定まる商位相であることを証明せよ．

(e) $\boldsymbol{R}P^1$ と S^1 が同相であることを証明せよ．

(f) $\{x,-x\}\mapsto(x_1{}^2-x_2{}^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$
によって与えられる写像 $f:\boldsymbol{R}P^2\to\boldsymbol{R}^4$ は連続な単射であることを示せ．

(g) X を位相空間とし，$f:X\to Y$ を全射とする．$\mathcal{U}_f$ を Y の商位相とする．$\mathcal{U}$ は Y のもう1つの位相で，$f:X\to Y$ が $\mathcal{U}$ に関して連続であるとする．もし，f が $\mathcal{U}$ について閉写像あるいは開写像であるならば，$(Y,\mathcal{U})$ は $(Y,\mathcal{U}_f)$ に同相であることを証明せよ．さらに，たとえ f が開でもなく閉でもなくても，$(Y,\mathcal{U})\cong(Y,\mathcal{U}_f)$ でありうるということを示す例を与えよ．

(h) $f:X\to Y$ を位相空間 X から集合 Y の上への全射とする．Y は f による商位相をもつとし，A を X の部分空間とする．$\mathcal{U}_1$ を $B=f(A)\subseteq Y$ の Y からの誘導位相とし，$\mathcal{U}_2$ を制限 $f|A:A\to B$ によって定まる商位相とする．$\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}_2$ を示せ．一般には，$\mathcal{U}_1\neq\mathcal{U}_2$ となることを示す例を与えよ(ヒント：$f:\boldsymbol{R}\to S^1$, $f(t)=(\cos 2\pi t,\ \sin 2\pi t)$ を考えよ)．また，A が X の閉集合であり，かつ f が閉写像である，あるいは，A が X の開集合であり f が開写像であるときには，$\mathcal{U}_1=\mathcal{U}_2$ であることを示せ．

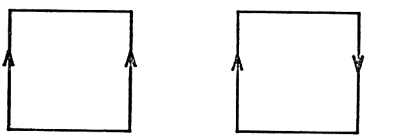
ある同値関係の同値類を考えると全射がえられる．つまり，X が位相空間で，$\sim$ が X 上の同値関係であれば，同値類の全体を $X/\sim$ と表わし，写像 $f:X\to X/\sim$ を $f(x)=[x]$，x を含む同値類，と定める．f による商位相をもつ $X/\sim$

は X から**位相的同一視**によってえられる**等化空間**であるとしばしばいわれる．例えば，$\sim$ が S^n 上の同値関係で，$x\sim y \Leftrightarrow x=\pm y$ で定められるとすれば，$S^n/\sim$ は当然，$\boldsymbol{RP}^n$ である．同様に，円筒 C 上での同じ関係は $C/\sim$ を与え，これはメービウスの帯である．

$\boldsymbol{R}^2$ で単位正方形 $X=\{(x, y)\,;\,0\leq x,\ y\leq 1\}$ に誘導位相を与え，X 上の同値関係 $\sim$ を次のように定める．

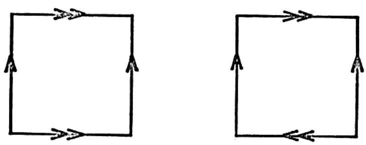
$$(x, y)\sim(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y'),\ \text{または，}\{x, x'\} = \{0, 1\}\ \text{かつ}\ y = y'.$$

このとき，商位相をもつ $X/\sim$ は実は円筒に同相である．今のところ，証明は凡長となるのであるが 8 章においてずっと簡潔に示される；直観的には明らかである．X を図 5.2(*a*) のように描く．矢印はどの点が(どのように)同一視されるかを示している．



(*a*) 円　筒　　(*b*) メービウスの帯

図 5.2



(*a*) トーラス　　(*b*) クラインの壺

図 5.3

同じ方法でメービウスの帯をつくることができるだろう；対応する図が図 5.2(*b*) で与えられている．そして，正方形 X 上の関係は次のようになる．

$$(x, y)\sim(x', y')\Leftrightarrow(x, y) = (x', y'),\ \text{または}\ \{x, x'\} = \{0, 1\}\ \text{かつ}\ y = 1-y'.$$

正方形の位相的同一視からえられる他の 2 つの例が図 5.3 で与えられる．

図 5.3(*a*) で与えられている X での自明でない関係は次のものであり，

$$(0, y)\sim(1, y),\qquad (x, 0)\sim(x, 1),$$

図 5.3(*b*) で与えられている X での自明でない関係は次のものである．

$$(0, y)\sim(1, y),\qquad (x, 0)\sim(1-x, 1).$$

後になれば明らかになる(しかし諸君はこの段階で証明して欲しい)ことであるが，トーラス(図 5.3(*a*) の空間)は

$$\{(x, y, z)\in \boldsymbol{R}^3\,;\,(\sqrt{x^2+y^2}-2)^2+z^2 = 1\}$$

で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間に同相である．同相写像は次のように与えられる．

$$(x, y)\mapsto((2+\cos(2\pi x))\cos(2\pi y), (2+\cos(2\pi x))\sin(2\pi y), \sin(2\pi x)).$$

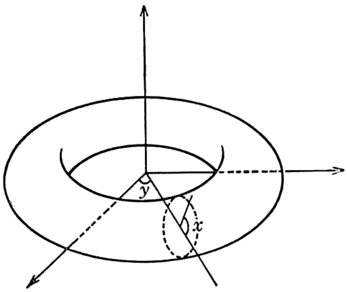


図 5.4

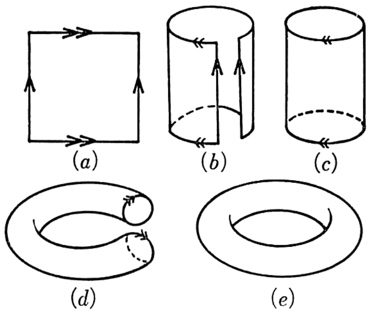


図 5.5

このことからトーラスの図として伝統的に(1 つ穴の) ドーナツの表面がひきあいに出されるのである．図 5.4 をみよ．

直観的には，図 5.3(*a*)の形をしたゴム膜から出発し，しかるべき同一視を行うならば，やはりドーナツの表面の形がえられる．図 5.5 をみよ．

クラインの壺に対して同じようなことをしようとすると困難である．というのは，$\boldsymbol{R}^4$ においてその同一視を行う必要があるからである．最初の同一視(図 5.6(*b*))は容易である．次の同一視(図 5.6(*c*))の為には，4 次元が必要になる．3 次元でみる為に，図 5.6(*d*)のように表わす．本当は存在しない自分自身の交わりが円周として現われている．これは，我々の住む空間が 3 次元の世界であるということによるのである．

図 5.6(*d*)を平面で切ってみると，クラインの壺は 2 つのメービウスの帯のそれらの境界を同一視したものに他ならないということがわかる(図 5.7(*a*), (*b*))．このことは，図 5.7(*c*), (*d*)のように見ることにより理解できる．

さらに直観的に考えるために，$\boldsymbol{R}P^2$ が $S^2/\sim$ と定義されるのを想起しよう．

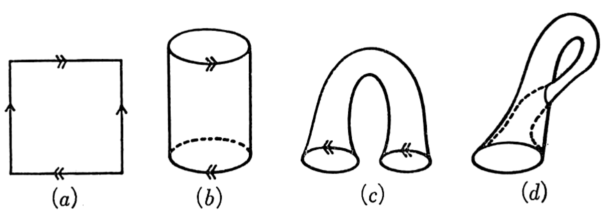


図 5.6

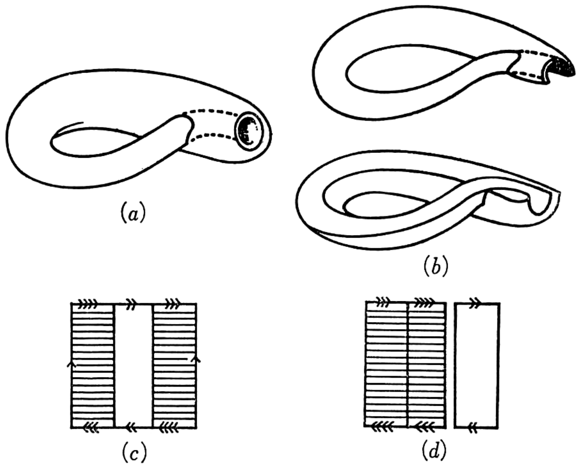


図 5.7

但し，

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'.$$

この場合，S^2 の北半球は南半球と同一視される．だから，北半球に注目すればよく，北半球は円板 $D^2=\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2+y^2\leq 1\}$ と，

$$(x, y, z)\mapsto (x, y) \quad ((x, y, z)\in S^2, z\geq 0)$$

によって同相になる．かくして，$\boldsymbol{R}P^2$ のことを $D^2/\sim$ と表わせる．但し，

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x',\ \text{または}\ x, x'\in S^1\subseteq D^2\ \text{かつ}\ x = -x'.$$

このことは，図について，図 5.8(b) または，同じことであるが，図 5.8(c) を与える．勿論，正確な証明をまだ与えたわけでない．

$\boldsymbol{R}P^2$ の ($\mathring{D}^2$ に同相な) 小さな部分をとり除いてみるとメービウスの帯がえられている；図 5.9 をみよ．こうして，実射影平面はメービウスの帯の境界に円

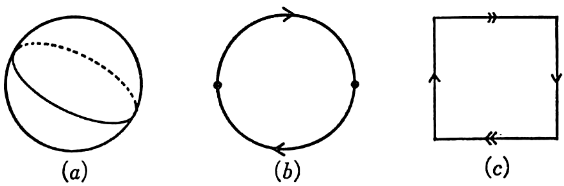


図 5.8

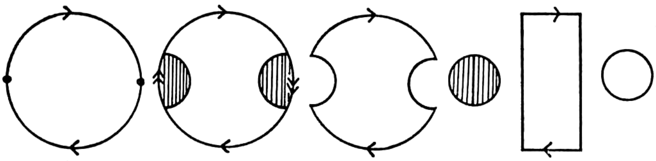


図 5.9

板を貼り合わせたものであると考えられる.

球面 S^2 は図 5.10(a) または (b) に示されるような商空間として表わされる. 直観的には, これらはジッパーをもつがま口(小銭入れ)と思える. ジッパーを締めれば球面がえられるのである.

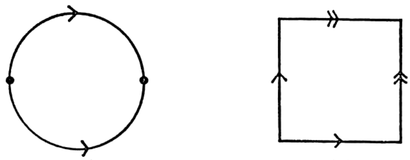


図 5.10

以上の諸例では, 直観的に議論した. きちんとした証明が与えられるのであるが, これらはもう少し理論がえられるまで残しておくのが最善である. 8章を読み終ってから, 読者はこの章をめくり返し, 直観的にしか述べなかった結果に関して証明の詳細を与えるのがよい.

円板や球面のより低い次元の類似例が区間と円周である. 単位区間の両端点を同一視して円周がえられる; 直観的にこれは明らかである. 読者はきちんとした証明を書き下してみるとよい.

5.4 問　題

(a) $I=[0,1]\subseteq \boldsymbol{R}$ であり, $\sim$ が, $x\sim x' \Leftrightarrow \{x, x'\}=\{0,1\}$ または $x=x'$, で与えられているとき, $I/\sim$ が S^1 に同相であることを証明せよ.

(b) メービウスの帯は, 円筒の性質と比較していくつかの興味深い性質をもつ. 円筒とメービウスの帯の模型を, 長さ 40 cm, 幅 4 cm の紙から作りなさい. 円筒及びメービウスの帯の上にふちの間の中間を通る線を鉛筆でひきなさい. そして, 鉛筆の線にそってはさみを入れて切りひらきなさい. 各々の場合についてその結果はどうなるか? もしも, ふちから 1/3 のところにそって切ったらどうか?

次の結果は，同相な空間の商空間は同相であることを保証している．

5.5 定　　理

$f: X \to Y$ を位相空間 X と Y の間の写像とする．X と Y はそれぞれ同値関係 $\sim_X$ と $\sim_Y$ をもつとし，$x \sim_X x' \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x')$ であるとする．もし，f が同相写像であれば，$X/\sim_X$ と $Y/\sim_Y$ は同相である．

証明　写像 $F: X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ を $F[x]=[f(x)]$ と定義する．但し，括弧[　]は同値類を表わす．もし，$[x]=[y]$ なら，$x \sim_X x'$ で，したがって $f(x) \sim_Y f(x')$ で，$[f(x)]=[f(x')]$ ということであるから，F は矛盾なく定義されている．F が同相写像であることを証明しよう．F が単射であるのを示すのに，$F[x]=F[x']$，したがって，$[f(x)]=[f(x')]$，すなわち $f(x) \sim_Y f(x')$ であるとしよう．しかしこのとき，$x \sim_Y x'$ であり，$[x]=[x']$ である．F が全射であるのは容易に示せる．F が連続であるということを示す為に，自然な射影 $\pi_X: X \to X/\sim_X$ および $\pi_Y: Y \to Y/\sim_Y$ を考える．これらは連続である．明らかに，$F\pi_X=\pi_Y f$ である．f は連続であるから，$F\pi_X$ は連続である．したがって，商の普遍写像性によって F は連続である．$F^{-1}\pi_Y=\pi_X f^{-1}$ であるから，F^{-1} が連続であることも全く同じように示される．▌

例えば，$\boldsymbol{R}^+=(0,\infty)\subseteq \boldsymbol{R}$ と同値関係；$x \sim x' \Leftrightarrow$ 整数 n が存在して $x'=3^n x$ を考えよう．また，$\boldsymbol{R}$ と同値関係；$x \sim x' \Leftrightarrow$ 整数 n が存在して $x'=n+x$ を考えよう．関数 $f: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$ を $f(x)=\log_3 x$ と定めると，これは同相写像であり，$x \sim x' \Leftrightarrow f(x) \sim f(x')$ が成立する．したがって，$\boldsymbol{R}^+/\sim$ と $\boldsymbol{R}/\sim$ は同相である；実は，双方とも円周に同相である．

定理 5.5 は 4 章で述べられた“同相”の直観的な考え方を説明している：空間 W から出発しよう．それを切りひらき X および関係 $\sim_X$ をうる．関係 $\sim_X$ は X をどのように貼り合わせれば W がえられるかを示すものである．そこで，X に同相写像 f を施し同値関係 $\sim_Y$ をもつ Y を得る．当然，

$$x \sim_X x' \Leftrightarrow f(x) \sim_Y f(x')$$

であることが望まれる．$\sim_Y$ にしたがって Y を貼り合わせ，$Z=Y/\sim_Y$ が得られる．定理 5.5 によってこの空間 Z は空間 W に同相である．

後で有用であることがわかる 1 つの概念として，集合 X に“作用する”群 $\boldsymbol{G}$

というものがある．この概念の内容は豊かで商位相をもつ空間の様々の例を与える．

5.6 定　義

X を集合とし，G を群とする．G が X に**作用する**そして X が **G–集合**であるとは，次をみたす写像 $G\times X\to X$, $(g,x)\mapsto g\cdot x$ と表わされ，G の X への**作用**と呼ばれるが，存在するときをいう．

(i)　$1\cdot x=x(x\in X)$, 但し 1 は G の単位元である，

(ii)　$g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x$　　$(g,h\in G$ かつ $x\in X)$.

例えば，G を位相空間 X の同相写像の全体のなす群(問題 3.7(d)をみよ)とし，$g\cdot x=g(x)\ (g\in G, x\in X)$ と定義する．これは G の X への作用を定義する．明らかに，$1\cdot x=x$ であり，$g\cdot(h\cdot x)=g\cdot h(x)=g(h(x))=(gh)(x)=(gh)\cdot x$ が成立するからである．もう 1 つの例が $G=\boldsymbol{Z}_2=\{\pm1\}$, 位数 2 の群，とし，$X=S^n$ としてえられる．$\boldsymbol{Z}_2$ の S^n への作用は，$\pm1\cdot x=\pm x$ で与えられる．もし，$G=\boldsymbol{Z}$, 整数の加法群，そして $X=\boldsymbol{R}$ とすれば，$\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{R}$ への作用が $n\cdot x=n+x$ $(n\in\boldsymbol{Z}, x\in X)$ で与えられる．この例は，$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{R}^2$ への作用に $(m,n)\cdot(x,y)=(m+x,n+y)$ によって拡張できる．いずれの場合にも，実際に 5.6 で定義されているような作用がえられていることを確かめるのは読者に委ねる．ここでの最後の例として，無限帯

$$\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ -1/2\leq y\leq 1/2\}$$

への $\boldsymbol{Z}$ の作用で，次のように定義されるものを与えておく．

$$m\cdot(x,y)=(m+x,(-1)^m y).$$

我々の G–作用の定義は厳密には**左** G–作用の定義である．**右** G–作用という概念も存在している．写像 $X\times G\to X$, $(x,g)\mapsto x\cdot g$ と表わされる，であり，$x\cdot 1=x$ および $(x\cdot g)\cdot h=x\cdot(gh)$ をみたすものである．G–作用といえば，以後常に左 G–作用のことであるとする．

5.7 問　題

(a)　X が右 G–集合であるとする．$x\in G$ および $g\in G$ に対し，

$$g\cdot x=x\cdot(g^{-1})$$

と定義する．これが G の X への(左)作用を定義することを示せ．また なぜ，$g\cdot x=x\cdot g$ としては定義できないのか？

(b) H を G の部分群とする．$h\in H$, $g\in G$ に対し，$h\cdot g$ を hg のことであると定義する．これが H の G への作用を定義するのを示せ．

(c) G を群とし $\mathscr{I}(G)$ を G の部分集合の全体のなす集合とする．

$g\cdot U = gU = \{gh\ ;\ h\in U\}\,(g\in G,\ U\in\mathscr{I}(G))$

が G の $\mathscr{I}(G)$ への作用を定義するのを示せ．

(d) G が X に作用するとし，$x\in X$ の**固定群**を

$G_x = \{g\in G\ ;\ g(x) = x\}$

と定義する．G_x が G の部分群であることを証明せよ．

(e) G が X に作用するとし，$x\in X$ の**軌道**を X の部分集合

$G\cdot x = \{g\cdot x\ ;\ g\in G\}$

と定義する．2 つの軌道 $G\cdot x, G\cdot y$ は交わらぬか等しいことを証明せよ．G–集合 X は軌道によって互いに交わらぬ部分集合に分解することを導け．

G–集合の定義の 1 つの重要な結論は，実は G が X へ全単射として作用しているということである．

5.8 定　理

X を G–集合とする．どんな $g\in G$ に対しても，$x\mapsto g\cdot x$ で定義される写像 $\theta_g : X\to X$ は全単射である．

証明　G–集合の定義より，$\theta_g\theta_h=\theta_{gh}$ かつ $\theta_1=1_X$；したがって，$\theta_g\theta_{g^{-1}}=1_X=\theta_{g^{-1}}\theta_g$．よって，$\theta_g$ は全単射である．▌

G が X に作用するとき，X に同値関係～を次のように定義できる．

$x\sim y \Leftrightarrow$ ある $g\in G$ が存在して，$g\cdot x=y$ となる，

あるいは，いいかえると $x\sim y\Leftrightarrow y\in G\cdot x$；問題 5.7(e)をみよ．そこで，同値類の全体を X/G と表わす；これは X の G による**商集合**と呼ばれる．自明な全射 $X\to X/G$ が存在している．もしも，X が位相空間で，G がその上に作用していれば，X/G に商位相を与えることができる．商位相をもつ X/G を X の G による**商空間**と呼ぶ．

例えば，もし $\boldsymbol{Z}_2$ が S^n に $\pm1\cdot x=\pm x$ と作用すれば，$S^n/\boldsymbol{Z}_2$ は $\boldsymbol{RP}^n$ に他ならない．もし，$\boldsymbol{Z}$ が $\boldsymbol{R}$ に $n\cdot x=n+x$ と作用すれば，$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は S^1 に他ならない．

5.9 問　題

(a) X を $\boldsymbol{R}^2$ の中の無限帯 $\left\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\,;\,-\dfrac{1}{2}\leq y\leq\dfrac{1}{2}\right\}$ で，$\boldsymbol{Z}$ の作用 $m\cdot(x,y)=(m+x,(-1)^m y)$ をもつとする．商空間 X/Z はメービウスの帯に同相であることを示せ．

(b) X と Y を G-集合とする．写像 $f:X\to Y$ が G-**同変**であるとは，$f(g\cdot x)=g\cdot f(x)\ (x\in X, g\in G)$ であるときをいう．X と Y が位相空間で，f が G-同変同相写像である(すなわち，G-同変でもあり同相写像でもある)ならば，X/G と Y/G は同相であることを証明せよ．

(c) 位相空間 X と Y に G が作用しているとき，$X/G\cong Y/G$ であっても，必ずしも X と Y が同相にならないということを示す例を構成せよ．

(d) X を G-集合とする．各 $x\in X$ に対し，固定群 G_x は G に作用し商 G/G_x が定義される．G/G_x は G_x の G における左剰余類の全体のなす集合に他ならないことを示せ．G-同変全単射が x の軌道 $G\cdot x$ と G/G_x の間に存在することを証明せよ．

位相空間に作用する群について上に与えた諸例では，問題になる群は連続に作用していた；そのような空間には特別な名称を与えよう．

5.10 定　義

X を位相空間とし，G を群とするとき，X が **G-空間**であるとは，G が X に作用し，かつ $x\mapsto g\cdot x$ で与えられる写像 $\theta_g:X\to X$ がすべての $g\in G$ に対し連続であるときをいう．

5.11 問　題

X が G-空間であるとする．写像 $\theta_g:X\to X,\ x\mapsto g\cdot x$, はすべての $g\in G$ に対し，X から X 自身への同相写像であることを証明せよ．

上の問題によって，X が G-空間であるとき，G は X の 1 つの同相写像の群であるということにもなる．このことを使用して，次の結果を証明する．

5.12 定　理

X が G-空間であるとする．そのとき，標準全射 $\pi : X \to X/G$ は開写像である．

証明　U を X の開集合とし，$\pi^{-1}(\pi(U))$ を考える．

$$
\begin{aligned}
\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{x \in X\ ;\ \pi(x) \in \pi(U)\} \\
&= \{x \in X\ ;\ \text{ある } y \in U \text{ に対し } G\cdot x = G\cdot y\} \\
&= \{x \in X\ ;\ \text{ある } y \in U,\ \text{ある } g \in G \text{ に対し，} x = g\cdot y\} \\
&= \{x \in X\ ;\ \text{ある } g \in G \text{ に対し，} x \in g\cdot U\} \\
&= \bigcup_{g \in G} g\cdot U.
\end{aligned}
$$

G の各元 g の作用は同相写像である．したがって，U が開であれば，$\pi^{-1}(\pi(U))$ も開である．したがって，$\pi(U)$ は X/G で開である．

次の問題において，最初のものは商の普遍写像性の拡張である．2番目のものは特別な場合に定理 5.12 を拡張している．

5.13 問　題

(a)　X を G-空間とし，$\pi : X \to X/G$ を標準射影とする．g が X/G から位相空間 Z への写像であるとする．g が開写像である為の必要十分条件は $g\pi$ が開写像となることである．

(b)　X を G-空間とし，G は有限であるとする．自然な射影 $\pi : X \to X/G$ は閉写像であることを証明せよ．

(c)　X が G-空間であり，H が G の正規部分群であるとする．X/H は G/H-空間であり，$(X/H)/(G/H) \cong X/G$ であることを証明せよ．

6

積　空　間

与えられた位相空間から新たに位相空間を構成する為の我々の最後の方法は積空間によるものである．2つの集合 X, Y の直積 $X\times Y$ とは，$x\in X$ と $y\in Y$ の順序づけられた対 (x, y) の全体のなす集合のことであるということを想起しよう．X と Y が位相空間であれば，X と Y の位相を使って $X\times Y$ に1つの位相を与えることができる．まず思い浮ぶのは，$X\times Y$ の開集合を X の開集合と Y の開集合の直積であるとすることである；しかしながら，この方法は完全に十分なものではないのである(位相になる為のどの条件が成立しないか？——考えよ！)．

6.1　定　　義

X と Y を位相空間とする．**(位相)積**または**積空間** $X\times Y$ とは集合 $X\times Y$ と X, Y の開集合の積の和集合のなす集合族のなす位相 $\mathcal{U}_{X\times Y}$，**積位相**という，を一緒にしたものである．

$\mathcal{U}_{X\times Y}$ の典型的な元は $\bigcup_{j\in J} U_j\times V_j$ の形をしている．但し，J はある添字集合であり，各 $j\in J$ に対し，U_j と V_j はそれぞれ X と Y の開集合である．

$\mathcal{U}_{X\times Y}$ が位相であるということを確かめるのは難しくない；$\emptyset=\emptyset\times\emptyset$ であり，$X\times Y=X\times Y$ であり最初の条件がみたされる．$W, W'\in\mathcal{U}_{X\times Y}$ であるならば，ある添字集合 J, K 及び X の開集合 U_j, U_k' および Y の開集合 $V_j, V_k'(j\in J, k\in J)$ によって，$W=\bigcup_{j\in J} U_j\times V_j$，$W'=\bigcup_{k\in K} U_k'\times V_k'$ と表わされる．

$$W\cap W'=\bigcup_{(j,k)\in J\times K}(U_j\cap U_k')\times(V_j\cap V_k')$$

であるから，位相に対する条件(ii)がみたされる．第3の条件は自明である．

X と Y の位相積の考え方は，有限個の位相空間の位相積へと自明なやり方で拡張される.

6.2 問　題

(a) $X_1 \cong X_2$ かつ $Y_1 \cong Y_2$ ならば $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$ を示せ.

(b) X, Y を距離づけ可能な空間とし，それぞれ距離 d_X, d_Y からえられたものとする.

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$

で定義される d は $X \times Y$ の積空間位相を与える $X \times Y$ 上の距離であることを示せ. $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ の積位相($\boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{R}^m$ は通常の位相をもつとしている)は $\boldsymbol{R}^{n+m} = \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^m$ の通常の位相と同じであることを証明せよ.

(c) 写像 $f: X \to Y$ のグラフとは，$(x, f(x)), (x \in X)$ の形の $X \times Y$ の点の集合である. もし，f が位相空間の間の連続写像であれば，f のグラフは X に同相であることを示せ.

(d) $\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ は $\boldsymbol{R} \times S^1$ に同相であることを証明せよ(ヒント：$\boldsymbol{R}^2 - \{0\}$ を $\boldsymbol{C} - \{0\}$ とみなせ).

$X \times Y$ の積位相のもう 1 つの特徴づけがある.

6.3 定　理

$X \times Y$ を 2 つの位相空間の積とする. 集合 $W \subseteq X \times Y$ が開であるための必要十分条件は，すべての $w \in W$ に対し，X の開集合 U_w, Y の開集合 V_w が存在して，$U_w \times V_w \subseteq W$ かつ $w \in U_w \times V_w$ となることである.

証明　W が開であるとすれば，$W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ と表わせる. 但し，J はある添字集合であり，U_j, V_j はそれぞれ X, Y の開集合である. もし，$w \in W$ であれば，ある $j \in J$ に対し，$w \in U_j \times V_j$ となる. 逆に，$\bigcup_{w \in W} U_w \times V_w$ は $X \times Y$ で開であり，明らかに W に一致する. ▌

自明な射影 $\pi_X: X \times Y \to X$ および $\pi_Y: X \times Y \to Y$ が $(x, y) \mapsto x$ および $(x, y) \mapsto y$ で与えられる. これらは**積射影**と呼ばれる. $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ かつ $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$ であるから，π_X および π_Y の両方が連続なのは明らかである.

6.4 定　理

すべての $y\in Y$ に対し，部分空間 $X\times\{y\}\subseteq X\times Y$ は X に同相である．

証明　写像 $f: X\times\{y\}\to X$ を $(x,y)\mapsto x$ により与える．これは明らかに全単射である．f を包含写像 $X\times\{y\}\to X\times Y$ および射影 $\pi_X: X\times Y\to X$ の合成として書くことができる．それらは両方とも連続であるから，f も連続である．次に，W が $X\times\{y\}$ の開集合であるとすれば，$W=(\bigcup_{j\in J}(U_j\times V_j))\cap(X\times\{y\})$ となる．但し，U_j, V_j はそれぞれ X, Y で開である．W は $\bigcup_{j\in J'}U_j\times\{y\}$ と表わせる．但し，$J'=\{j\in J\,;\,y\in V_j\}$ である．こうして，$f(W)=\bigcup_{j\in J'}U_j$ となり，X で開となる．これは f が開でもあることを証明し，したがって同相写像である．▌

もし，$f: A\to X$ および $g: A\to Y$ が位相空間の間の写像であるならば，写像 $h: A\to X\times Y$ を $h(a)=(f(a),g(a))$ によって定義できる．h が $\pi_X h=f$ および $\pi_Y h=g$ をみたす一意的な写像であるのは明らかである．h の連続性と f,g の連続性の間の関連は**積の普遍写像性**と呼ばれるものである．

6.5 定　理

A, X および Y を位相空間とする．このとき，写像 $f: A\to X$, $g: A\to Y$ のどんな対に対しても，$h(a)=(f(a),g(a))$ によって与えられる写像 $h: A\to X\times Y$ が連続である為の必要十分条件は f および g が連続であることである．

証明　もし，h が連続であれば，$\pi_X h=f$ および $\pi_Y h=g$ も連続である．逆に，f および g が連続であるとする．U, V をそれぞれ X, Y の開集合とする．そのとき，$h^{-1}(U\times V)=\{a\,;\,f(a)\in U,\ g(a)\in V\}=f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)$ となる．ところが，$f^{-1}(U)$ と $g^{-1}(V)$ はともに開であるから，$h^{-1}(U\times V)$ も開である．いま，$X\times Y$ の開集合 W を考える．もし $x\in W$ なら，$x\in U\times V\subseteq W$ である，但し，U, V は X, Y で開である．こうして，$h^{-1}(x)\in f^{-1}(U)\cap g^{-1}(V)\subseteq h^{-1}(W)$，よって，$h^{-1}(W)$ は開である．▌

6.6 問　題

(a)　$X\times Y$ の積位相は π_X および π_Y が連続となる最弱位相であることを

示せ．

(b) X を G-空間とし Y を H-空間とする．空間 $(X\times Y)/(G\times H)$ が $(X/G)\times(Y/H)$ に同相であることを証明せよ．

(c) $(n, m)\in \boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ および $(x, y)\in\boldsymbol{R}^2$ に対し，

$$(n, m)\cdot(x, y) = (n+x, m+y)$$

と定義する．これが $\boldsymbol{R}^2$ を $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$-空間とすることを示せ．$\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ は $S^1\times S^1$ に同相であることを証明せよ．

(d) トーラス（図 5.3 (a) および 5.4 をみよ）は $S^1\times S^1$ に同相であることを証明せよ．

(e) $n\in\boldsymbol{Z}, z\in\boldsymbol{C}-\{0\}$ に対し，$n\cdot z$ を

$$n\cdot z = 2^n z$$

によって定義する．これは $\boldsymbol{C}-\{0\}$ を $\boldsymbol{Z}$-空間とすることを示せ．$\boldsymbol{C}-\{0\}/\boldsymbol{Z}$ は $S^1\times S^1$ に同相であることを証明せよ（ヒント：問題 6.2 (d), 6.6 (b) および $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{Z}\times\{1\}$ を使用せよ.）．

(f) (e)と同様，しかし $n\cdot z$ を

$$n\cdot z = (2\omega)^n z$$

と定義する．但し，$\omega=\exp(2\pi i/3)$．$\boldsymbol{C}-\{0\}/\boldsymbol{Z}$ は何か？

(g) $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ と $S^{n-1}\times\boldsymbol{R}$ は同相な空間であることを証明せよ（ヒント：$f(x, t)=2^t x$ により与えられる写像 $f: S^{n-1}\times\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ を考えよ）．

(h) $S_{p,q} = \{x\in\boldsymbol{R}^n\,;\, {x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_p}^2-{x_{p+1}}^2-\cdots-{x_{p+q}}^2 = 1\}$

によって定義される部分空間 $S_{p,q}\subseteq\boldsymbol{R}^n$，但し $p+q\leq n$，が $S^{p-1}\times\boldsymbol{R}^{n-q}$ に同相であることを証明せよ（ヒント：写像 $f: S^{p-1}\times\boldsymbol{R}^{n-q}\rightarrow S_{p,q}$ を

$$f(x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_{n-q}) = (xz, x_2z, \cdots, x_pz, y_1, \cdots, y_{n-p})$$

但し，$z=\sqrt{1+{y_1}^2+\cdots+{y_q}^2}$，と定め，これについて考えよ）．

(i) G を $Tx=2x$ によって定義される写像 $T: \boldsymbol{R}^n-\{0\}\rightarrow\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ の生成する同相写像の群 $\{T^i\,;\, i\in\boldsymbol{Z}\}$ とする．$\boldsymbol{R}^n-\{0\}/G$ が $S^{n-1}\times S^1$ に同相であることを示せ．

(j) 通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ の次の 2 つの部分空間が同相であることを証明せよ．

$$I^n = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \ ; 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \cdots, n\},$$

$$D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \ ; \|x\| \leq 1\}.$$

(ヒント：まず，$I^n \cong [-1,1]^n = X$ を示し，次に，$\varphi : X \to D^n$ および $\psi : D^n \to X$ を次によって定義せよ．

$$\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}}{\|x\|}(x_1, \cdots, x_n) \quad (x \neq 0),$$

$$\varphi(0) = 0,$$

$$\psi(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\|x\|}{\max\{|x_1|, \cdots, |x_n|\}}(x_1, \cdots, x_n) \quad (x \neq 0),$$

$$\psi(0) = 0.$$

直観的には，0 から ∂X への線分を長さ 1 になるように線形に縮めよ．図 6.1 をみよ)．

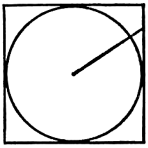


図 6.1

(k) $\mathring{D}^n \cong \boldsymbol{R}^n$ を証明せよ (ヒント：$\mathring{D}^n \cong \mathring{I}^n \cong (\mathring{I})^n$)．

(l) $X \cong X \times X$ となるような空でない位相空間をみつけよ (ヒント：離散位相をもつ無限集合について試みよ．その試みをした後で，離散位相ではない位相空間でそのようなものの例を見つけるようにせよ)．

7

コンパクト空間

この章と次の章では，同相写像によって保たれる位相空間の性質に視点をあてる．これによって，もしある空間がその性質をもち，もう1つの空間がその性質をもたないならば，そのとき，2つの空間は同相でありえないという1つの重要な結論を下すことができる．

最初の性質はコンパクト性である．この概念は本質的には，もし$\{U_j\,;\,j\in J\}$が単位区間$[0,1]\subseteq \boldsymbol{R}$(通常の位相をもつとする)の開集合の集まりで，$\bigcup_{j\in J} U_j=[0,1]$であるならば，これらの開集合の有限個の集まりで，その和集合が依然として$[0,1]$であるものが存在するという事実に基づいている；定理7.7をみよ．

7.1 定　義

集合Xの部分集合Sの被覆とは，$S\subseteq\bigcup_{j\in J} U_j$であるような$X$の部分集合の集まり$\{U_j\,;\,j\in J\}$のことである．加えて，添字集合$J$が有限であるならば，$\{U_j\,;\,j\in J\}$は**有限被覆**といわれる．

例えば，集まり$[1/n, 1-1/n]\,;\,n\in \boldsymbol{N}\}$は$\boldsymbol{R}$の部分集合$(0,1)$の被覆である．勿論，$S=X$のとき，$X=\bigcup_{j\in J} U_j$であれば，$\{U_j\,;\,j\in J\}$は$X$の被覆である．例えば，もし$U_n=(n, n+3)\subseteq \boldsymbol{R}$ならば，$\{U_n\,;\,n\in \boldsymbol{Z}\}$は$\boldsymbol{R}$の被覆である．

7.2 定　義

$\{U_j\,;\,j\in J\}$, $\{V_k\,;\,k\in K\}$がXの部分集合Sの被覆であるとする．もし，すべての$j\in J$に対し，$U_j=V_k$となる$k\in J$が存在するとき，$\{U_j\,;\,j\in$

$J\}$ は被覆 $\{V_k\,;\,k\in J\}$ の部分被覆であるという．

例えば，$\{V_r\,;\,r\in \boldsymbol{R}\}$，但し，$V_r=(r,r+3)\subseteq \boldsymbol{R}$，は $\boldsymbol{R}$ の被覆であり，$\{U_n\,;\,n\in \boldsymbol{Z}\}$，但し，$U_n=(n,n+3)$，は $\{V_r\,;\,r\in \boldsymbol{R}\}$ の部分被覆である．

7.3　定　義

X が位相空間であり，S が部分集合であるとする．S の被覆 $\{U_j\,;\,j\in J\}$ が S の**開被覆**であるとは，各 $U_j, j\in J$，が X の開集合であるときをいう．

7.4　定　義

位相空間 X の部分集合 S が**コンパクト**であるとは，S のどのような開被覆も有限部分被覆をもつときをいう．

とくに，位相空間 X がコンパクトである為には X のどんな開被覆も有限部分被覆をもつことが十分である．通常の位相をもつ空間 $\boldsymbol{R}$ はコンパクトではない．なぜなら，$\{(n,n+2)\,;\,n\in \boldsymbol{Z}\}$ は有限部分被覆をもたない $\boldsymbol{R}$ の開被覆であるから．離散位相をもつ空間 X がコンパクトである為には X が有限であることが必要十分である．これは，X の各点が開であり，もし X が無限集合であれば1点のなす集合からなる開被覆は有限部分被覆をもたない為である．他方，もし X が有限であれば，有限個の開集合しか存在しないのである．単位区間 $[0,1]$ が $\boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合であることをまもなく示すことになるだろう．

7.5　問　題

(a)　X が有限補位相をもつとする．X はコンパクトであることを示せ．X の各部分集合もコンパクトであることを示せ．

(b)　位相空間がコンパクトである為には，$\bigcap_{j\in J} C_j=\emptyset$ であるような閉集合の集まり $\{C_j\,;\,j\in J\}$ には，必ず $\bigcap_{k\in K} C_k=\emptyset$ であるような有限部分 $\{C_k\,;\,k\in K\}$ が存在することが必要十分であることを証明せよ．

(c)　$\mathcal{F}$ を次のように定義される $\boldsymbol{R}$ の位相とする；$U\in\mathcal{F}\Leftrightarrow$ 各 $s\in U$ に対して，$[s,t)\subset U$ となる $t>s$ が存在する．$(\boldsymbol{R},\mathcal{F})$ の部分集合 $[0,1]$ はコンパクトでないことを証明せよ．

位相空間の部分集合 S には誘導位相を与えられるので，S に対するコンパクト性について２つの概念がある：X の部分集合として，そして部分空間としての位相空間そのものとして．これらの概念は一致する．

7.6 定　　理

X の部分集合 S がコンパクトである為の必要十分条件は，誘導位相が与えられた位相空間としてコンパクトであることである．

証明　誘導位相をもつ S の開集合は，X の開集合 U に対し $U\cap S$ の形をしているので，このことは明らかである．読者はその詳細を注意深く書き下すとよいだろう．▮

こういうわけで，S がコンパクトであるということを，その誘導位相に関してコンパクト空間となることであると定義することもできたのであった．

次の結果はコンパクト空間の重要な例を与えている．

7.7 定　　理

単位区間 $[0,1]\subseteq\boldsymbol{R}$ はコンパクトである．

証明　$\{U_j\,;j\in J\}$ を $[0,1]$ の開被覆とし，有限部分被覆が存在せぬと仮定しよう．このことは，区間 $[0,1/2]$ または $[1/2,1]$ のいずれかが $\{U_j\,;j\in J\}$ の有限個でおおわれることがないことを意味している．２つのこれらの区間の１つで，$\{U_j\,;j\in J\}$ の有限個の部分がおおえないものを $[a_1,b_1]$ と表わす．再び，$[a_1,1/2(a_1+b_1)]$ または $[1/2(a_1+b_1),b_1]$ のいずれかは $\{U_j\,;j\in J\}$ の有限個の部分でおおえない；そのようなものを $[a_2,b_2]$ とする．この方法をくりかえし行い，$\{U_j\,;j\in J\}$ の有限個の部分がいずれもおおえないような区間の列 $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2],\cdots,[a_n,b_n],\cdots$ がえられる．さらに，$b_n-a_n=2^{-n}$ であり，$a_n\leq a_{n+1}<b_{n+1}\leq b_n$ がすべての n について成立する．この最後の条件から，$a_m\leq b_n$ がどのような自然数 m と n の対(つい)に対しても成立し，b_n は $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ の上界となる．a を $\{a_1,a_2,\cdots\}$ の上限とする．$a\leq b_n$ がすべての n について成立するから，a は $\{b_1,b_2,\cdots\}$ の下界である．b を $\{b_1,b_2,\cdots\}$ の下限とする．定義により，すべての n に対し $a_n\leq a\leq b\leq b_n$ が成立している．ところが，$b_n-a_n\leq 2^{-n}$ であるから，各 n に対し $b-a\leq 2^{-n}$ であり，$a=b$ となる．

$\{U_j\,;\,j\in J\}$ は $[0,1]$ をおおっていて，$a=b\in[0,1]$ であるから，ある $j\in J$ に対し $a\in U_j$ となる．U_j は開集合だから，$\varepsilon>0$ に対し $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subseteq U_j$ となる．自然数 N を $2^{-N}<\varepsilon$ とすれば，$b_N-a_N<\varepsilon$ となる．しかしながら，$a\in[a_N, b_N]$ であり，$a-a_N<2^{-N}<\varepsilon$，$b-b_N<2^{-N}<\varepsilon$ となる．したがって，$[a_N, b_N]\subseteq(a-\varepsilon, a+\varepsilon)\subseteq U_j$ となる．このことは，$[a_N, b_N]$ が $\{U_j\,;\,j\in J\}$ の有限個の部分でおおえないということに矛盾している．▌

上の議論は，単位 n-立方体 $I^n=I\times I\times\cdots\times I\subseteq \boldsymbol{R}^n$ がコンパクト空間であることを示す為に拡張できる．但し，$I=[0,1]\subseteq\boldsymbol{R}$．しかしながら後になってその別証を与えるだろう．

7.8　定　理

$f: X\to Y$ を連続写像とする．もし，$S\subseteq X$ がコンパクト部分空間であれば，$f(S)$ もコンパクトである．

証明　$\{U_j\,;\,j\in J\}$ を $f(S)$ の開被覆とする；そのとき，$\{f^{-1}(U_j)\,;\,j\in J\}$ は S の開被覆である．S はコンパクトであるから，有限部分被覆 $\{f^{-1}(U_k)\,;\,k\in K\}$，但し K は有限である，が存在する．ところが，$f(f^{-1}(U_k))\subseteq U_k$ であるから，$\{U_k\,;\,k\in K\}$ は $f(S)$ の被覆であり，$\{U_j\,;\,j\in J\}$ の有限部分被覆になっている．

7.9　系

(a)　各閉区間 $[a,b]\subseteq\boldsymbol{R}$ はコンパクトである．

(b)　X と Y が同相な位相空間であるとする；そのとき，
　　X がコンパクトである $\Leftrightarrow Y$ がコンパクトである．

(c)　X がコンパクトであり Y が $f: X\to Y$ に関する商空間であれば，Y もコンパクトである．

(d)　S^1 はコンパクトである．

この証明は明らかであろう．(b)はコンパクトでない空間はコンパクト空間に同相でないと言っていることに注意する．

コンパクト空間のどんな部分空間もコンパクトであるとは限らない；例えば $(0,1)$ はコンパクト空間 $[0,1]$ の部分集合であるが，これはコンパクトでない．

このことは，被覆 $\{(1/n, 1-1/n)\,;\, n\in N\}$ を使うことによってすぐにわかる．しかしながら，コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．

7.10 定　　理

コンパクト空間の閉集合はコンパクトである．

証明 $\{U_j\,;\, j\in J\}$ を閉集合 $S\subseteq X$ の開被覆とする．但し，各 U_j は X の開集合である．$\bigcup_{j\in J} U_j\supseteq S$ であるから，$\{U_j\,;\, j\in J\}\cup\{X-S\}$ は X の開被覆であり，X はコンパクトだからその有限部分被覆が存在する．この有限部分被覆は，$\{U_k\,;\, k\in K\}$ または $\{U_k\,;\, k\in K\}\cup\{X-S\}$ の形をしている．但し K は有限である．したがって，$\{U_k\,;\, k\in K\}$ は S をおおう $\{U_j\,;\, j\in J\}$ の有限部分被覆である．▌

誘導位相および商位相のもとでのコンパクト性について以上で調べた．そこで積位相に眼を向けよう．

7.11 定　　理

X と Y を位相空間とする．そのとき，X および Y がコンパクトである $\Leftrightarrow X\times Y$ がコンパクトである．

証明 X および Y がコンパクトであるとする．$\{W_j\,;\, j\in J\}$ を $X\times Y$ の開被覆とする．定義により W_j は $\bigcup_{k\in K} U_{j,k}\times V_{j,k}$，但し $U_{j,k}$ は X で開で，$V_{j,k}$ は Y で開である，という形をしている．かくして，$\{U_{j,k}\times V_{j,k}\,;\, j\in J, k\in K\}$ は $X\times Y$ の開被覆である．各 $x\in X$ に対し，部分空間 $\{x\}\times Y$ はコンパクトである(それは Y に同相である)．$\{U_{j,k}\times V_{j,k}\,;\, j\in J, k\in K\}$ は $\{x\}\times Y$ をおおうから，$\{x\}\times Y$ をおおう有限部分被覆 $\{U_i(x)\times V_i(x)\,;\, i=1,\cdots,n(x)\}$ が存在する．

$$U'(x)=\bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x)$$

と定義する．$\{U'(x)\,;\, x\in X\}$ は X の開被覆であり，それゆえ有限部分被覆 $\{U'(x_i)\,;\, i=1,2,\cdots,m\}$ をもつ．明らかに，

$$\{U'(x_i)\times V_k(x_i)\,;\, i=1,2,\cdots,m,\quad k=1,2,\cdots,n(x_i)\}$$

は $X\times Y$ の有限開被覆である．各 i および k_i に対し，ある $j\in J$ および $k\in K$ が存在して

$$U'(x_i)\times V_{k_i}(x_i)\subseteq U_{j,k}\times V_{j,k}\subseteq W_j$$

となる．したがって，$\{W_j\,;\,j\in J\}$ の $X\times Y$ をおおう有限部分被覆が存在することが示された．逆に，$X\times Y$ がコンパクトであれば，π_X および π_Y は連続だから，X および Y もコンパクトとなる．∎

勿論，より一般に，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ がコンパクト位相空間であるならば，積 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ もまたコンパクトである．とくに，単位 n-立方体 I^n はコンパクトである．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 S が有界であるとは，実数 $K>0$ が存在して，各点 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in S$ に対し，$|x_i|\leq K$ が $i=1, 2, \cdots, n$ に対し成立するときをいう．いいかえれば，S が幅 $2K$ の n-立方体の中にあるということである．これは単位 n-立方体に同相であるから，次の結果がえられる：

7.12　定　　理

(ハイネ・ボネル)　$\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトである．

定理 7.12 の逆もまた真である；問題 8.14 (n) をみよ．以前の結果から，今や次の空間の各々がコンパクトであると結論できる：

S^n($\boldsymbol{R}^{n+1}$ の有界閉集合である)；

$S^n\times S^n\times\cdots\times S^n$；

$\boldsymbol{R}P^n$ (S^n の全射像)；

メービウスの帯($\boldsymbol{R}^3$ の有界閉集合)．

7.13　問　　題

(a)　次のどの空間がコンパクトであるか？

$D^n=\{x\in\boldsymbol{R}^n\,;\,\|x\|\leq 1\}$，$\{x\in\boldsymbol{R}^n\,;\,\|x\|<1\}$，

$\{(s, t)\in\boldsymbol{R}^2\,;\,0\leq s\leq 1, 0\leq t\leq 4\}$，

$\{(s, t, u)\in\boldsymbol{R}^3\,;\,s^2+t^2\leq 1\}\cap\{(s, t, u)\in\boldsymbol{R}^3\,;\,t^2+u^2\leq 1\}$．

(b)　$\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合は有界であることを証明せよ．

(c)　関数 $f: I\to\boldsymbol{R}$ のグラフがコンパクトである必要十分条件は f が連続となることである．不連続関数 $g: I\to\boldsymbol{R}$ で，そのグラフが閉であるがコンパクトでない例を与えよ．

(d)　X, Y を位相空間とする．$\mathscr{F}(X, Y)$ を X から Y への連続写像の全体のな

す集合とする．もし，$A\subseteq X$ かつ $B\subseteq Y$ であれば，A を B にうつす $\mathscr{F}(X, Y)$ の部分集合を $F(A, B)$ と表わす；

$F(A, B)=\{f\in\mathscr{F}(X, Y)\,;\, f(A)\subseteq B\}$.

$\mathscr{S}$ を次のものとする．

$\mathscr{S}=\{F(A, B)\,;$ A が X のコンパクト部分集合で，B は Y の開集合$\}$.

$\mathscr{U}=\{U\subseteq\mathscr{F}(X, Y)\,;$ もし，$f\in U$ ならば，$F_1, \cdots, F_n\subseteq\mathscr{S}$ が存在して，$f\in F_1\cap\cdots\cap F_n\subseteq U$ となる$\}$.

と定義する．$\mathscr{U}$ が $\mathscr{F}(X, Y)$ の位相になることを証明せよ（この位相は**コンパクト開位相**と呼ばれる）．

(e) X をコンパクト距離づけ可能な位相空間とする．Y が距離 d をもつ距離空間であるとし，$\mathscr{F}(X, Y)$ 上で d^* を

$$d^*(f, g)=\sup_{x\in X} d(f(x), g(x))$$

によって定義する．d^* が $\mathscr{F}(X, Y)$ に対する距離であることおよび，$\mathscr{F}(X, Y)$ 上えられる位相がそのコンパクト開位相であることを証明せよ．

(f) 空間 X が**局所コンパクト**であるとは，すべての点 $x\in X$ に対し，x のどのような近傍も x のコンパクト近傍を含むときをいう．もし X が局所コンパクトであれば，$e(f, x)=f(x)$ で与えられる**採値写像** $e:\mathscr{F}(X, Y)\times X\to Y$ が連続であることを証明せよ．

(g) X をコンパクト位相空間で，距離 d をもつ距離空間から生じたものとする．もし，$\{U_j\,;\, j\in J\}$ が X の開被覆であるならば，実数 $\delta>0$（$\{U_j\,;\, j\in J\}$ の**ルベーグ数**と呼ばれる）が存在して，直径が δ よりも小であるどんな X の部分集合もある U_j の中に含まれる．

(h) X を位相空間とし，X^∞ を $X\cup\{\infty\}$，但し ∞ は X に属さない元とする，と定義する．もし，$\mathscr{U}$ が X の位相であれば，そのとき $\mathscr{U}^\infty$ を $\mathscr{U}$ と $V\cup\{\infty\}$ の形のすべての集合を合わせたものと定義する．但し，$V\subseteq X$ かつ $X-V$ はコンパクトであり，X で閉であるとする．$\mathscr{U}^\infty$ が X^∞ の位相であることを証明せよ．また，X が X^∞ の部分空間であり，X^∞ がコンパクトであることを証明せよ．（$(X^\infty, \mathscr{U}^\infty)$ は X の **1 点コンパクト化**であると呼ばれる．）

8

ハウスドルフ空間

この章の出発点は，“もし位相空間 X が距離づけ可能であるならば，X の相異なる任意の 2 点 x, y に対して，x と y それぞれを含む開集合 U_x と U_y で，$U_x \cap U_y = \emptyset$ となるものが存在する”ことを証明せよ，という問題 2.2(b) にある．証明は簡単である：$x \neq y$ であるから，ある $\varepsilon > 0$ に対して $d(x, y) = 2\varepsilon$ となる．ここで d は X の位相を与える X の距離である．すると，集合 $B_\varepsilon(x) = \{z \in X ; d(x, z) < \varepsilon\}$ と $B_\varepsilon(y)$ が問題で要求された条件をみたしている．

8.1　定　義

空間 X がハウスドルフであるとは，X の相異なるいかなる 2 点 x, y に対しても，x, y それぞれを含む開集合 U_x, U_y で，$U_x \cap U_y = \emptyset$ となるものが存在するときをいう．

こうして，すべての距離づけ可能空間はハウスドルフであり，とくに通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ 及び離散位相をもつどのような空間もハウスドルフである．自明な位相をもつ空間は，もし少くも 2 個の点をもてば，ハウスドルフではない．

8.2　問　題

(a) X を有限補位相をもつ空間とする．X がハウスドルフであるための必要十分条件は X が有限集合である，ということを証明せよ．

(b) $\boldsymbol{R}$ の位相 $\mathscr{T}$ を次のように定めるとする：$U \in \mathscr{T}$ である必要十分条件は各 $s \in U$ に対し，$[s, t) \subseteq U$ となる $t (> s)$ が存在する．このとき，$(\boldsymbol{R}, \mathscr{T})$ はハウスドルフであることを証明せよ．

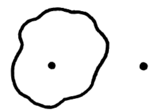
(c) X と Y を同相な位相空間とする．X がハウスドルフであるための必要十分条件は Y がハウスドルフ空間であることを証明せよ．

ハウスドルフ条件は分離条件の一例である．他の分離条件のいくつかを次に定義するが，次の数ページ後からはハウスドルフ条件についてのみ詳細に検討することになる．

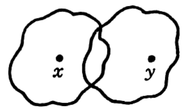
8.3 定　義

k を $0, 1, 2, 3$ 又は 4 の整数とする．空間 X は，以下に与える条件 T_k をみたすとき，**T_k-空間**であるという．

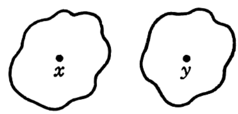
T_0： X の相異なる2点に対して，それら2点のうちの一方を含み，他方を含まぬ開集合が存在する．



T_1： X の相異なる2点 x, y に対し，x を含み，y を含まぬ開集合 U_x 及び y を含み x を含まぬ開集合 U_y が存在する．



T_2： X の相異なる2点 x, y に対し，開集合 U_x, U_y で，$x \in U_x, y \in U_y$ で，$U_x \cap U_y = \emptyset$ となるものが存在する．



T_3： X は条件 T_1 をみたし，X のかってな閉集合 F 及び F に属さないかってな点 x に対し，開集合 U, V で，

$$x \in U, \ F \subset V \ \text{かつ} \ U \cap V = \emptyset$$

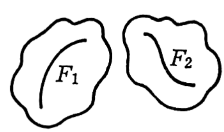
となるものが存在する．



T_4： X は条件 T_1 をみたし，互いに交わらない X の閉集合 F_1, F_2 に対し，開集合 U, V で，

$$F_1 \subset U, \ F_2 \subset V \ \text{かつ} \ U \cap V = \emptyset$$

となるものが存在する．



T_2-空間はハウスドルフ空間のことである．T_3-空間は**正則空間**とも呼ばれる．明らかに，$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ が成立する．条件 T_1 が何故条件 T_3 及び T_4 に含まれているのかという理由は次の結果(定理 8.5)で明らかにされ，そのことか

ら $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ が成立する．

8.4　問　題

(a)　X と Y が同相な空間であるとする．X が T_k-空間$\Leftrightarrow Y$ が T_k-空間($k=0, 1, 2, 3, 4$)を証明せよ．

(b)　位相空間 X_0, X_1, X_2, X_3 で，X_k は T_k-空間であるが，T_j-空間($j>k$)とならないものを構成せよ．

(c)　コンパクトハウスドルフ空間は T_4-空間であることを証明せよ(ヒント：定理 8.7 の証明をみよ，それでもダメなら定理 8.11 をみよ)．

8.5　定　理

空間 X が T_1 であるための必要十分条件は X の各点が閉集合であることである．

証明　X が T_1-空間であると仮定する．$x \in X, y \in X-\{x\}$ とする．このとき，y を含み x を含まぬ開集合 U_y が存在する．それゆえ，

$$\bigcup_{y \in X-\{x\}} U_y = X-\{x\}$$

であり，このことは，$X-\{x\}$ が開集合の和集合として表わされること，したがって開集合であることを示している．こうして $\{x\}$ は閉集合となる．

逆に，もし $\{x\}$ と $\{y\}$ が閉集合であれば，$X-\{x\}$ と $Y-\{y\}$ は開集合で，一方は y を含み x を含まず，他方は x を含まず y を含まない．すなわち，X は T_1-空間である．▌

この系として次のような結果がえられる．

8.6　系

ハウスドルフ空間では各点は閉集合である．

事実，もっと一般的な結果が次のように成立している．

8.7　定　理

ハウスドルフ空間 X のコンパクト部分集合 A は閉集合である．

証明　$A \neq \emptyset$ かつ $A \neq X$ と仮定してよい．さもなければ，A は明らかに閉

集合であり，証明は終るからである．一点 $x\in X-A$ をとり出すと，各 $a\in A$ に対し，$x\in U_a, a\in V_a$ かつ $U_a\cap V_a=\emptyset$ なる開集合の対 (U_a, V_a) が存在する．開集合族 $\{V_a ; a\in A\}$ は A を覆い，かつ A はコンパクトだから，A を覆う有限部分被覆 $\{V_{a(1)}, \cdots, V_{a(n)}\}$ が存在する．集合 $U=U_{a(1)}\cap\cdots\cap U_{a(n)}$ は x を含む開集合で，各 $V_{a(i)}$ と交わらない．よって，$U\subset X\text{-}A$ である．かように，各点 $x\in X-A$ に x を含み，$X-A$ に含まれる開集合が存在する．このことは，$X-A$ が開集合すなわち A が閉集合であることを示している．▌

この定理 8.7 から重要な結果が導かれる．

8.8 定　理

$f: X\to Y$ をコンパクト空間 X からハウスドルフ空間 Y への連続写像とする．このとき，f が同相写像であるための必要十分条件は f が全単射であることである．

証明　明らかに，f が同相写像であれば全単射である．興味あるのは逆の証明である．そこで，f が全単射である，したがって逆写像 f^{-1} が存在すると仮定する．ところで，f^{-1} が連続であるための必要十分条件は，X の閉集合 V に対し，$(f^{-1})^{-1}(V)=f(V)$ が閉集合となることである．もし V が X で閉であれば，7.10 により，V もコンパクトである．したがって，7.8 により，$f(V)$ はコンパクトである．よって，8.7 によって $f(V)$ は閉となり，f^{-1} が連続であることが示された．▌

上の結果において，ハウスドルフ及びコンパクトであるという条件が両方とも必要である．例えば，もし X が離散位相をもつ実数の全体(したがってコンパクトでない)とし，Y が通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}$(したがってハウスドルフである)とすれば，恒等写像 $X\to Y$ は連続な全単射であるが同相写像ではない．また，$X=\{x, y\}$ が離散位相をもつ(したがってコンパクトである)とし，$Y=\{x, y\}$ が位相 $\{\emptyset, Y, \{x\}\}$ をもつ(したがってハウスドルフでない)とすれば，恒等写像は連続かつ全単射であるが同相写像ではない．

上の定理を使用して，第5章での多くの同相写像が実際にそうであることが，いまでは容易にわかる．例えば，コンパクト空間 X のハウスドルフ空間の中への連続な単射による像 $f(X)$ は X に同相である．

さてこれから，ハウスドルフ性がいかに部分空間，積空間そして商空間へと受け継がれてゆくかを調べてゆこう．

8.9　定　理

ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフである．

証明　x, y を S の相異なる2点とする．このとき，X の開集合 U_x, U_y で，$x \in U_x$, $y \in U_y$ かつ $U_x \cap U_y = \emptyset$ となるものが存在する．集合 $U_x \cap S$ および $U_y \cap S$ は，S の開集合で，$x \in U_x \cap S$, $y \in U_y \cap S$ かつ $(U_x \cap S) \cap (U_y \cap S) = \emptyset$ をみたしている．よって，S はハウスドルフである．▌

とくに，通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ のどのような部分集合もハウスドルフである．

8.10　定　理

X と Y を位相空間とする．そのとき，X と Y がハウスドルフであるための必要十分条件は $X \times Y$ がハウスドルフとなることである．

証明　X と Y がハウスドルフであるとし，$w_1 = (x_1, y_1)$ と $w_2 = (x_2, y_2)$ を $X \times Y$ の相異なる点とする．もし，$x_1 \neq x_2$ であれば，そのとき $x_1 \in U_1$，$x_2 \in U_2$ かつ $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ なる X の開集合 U_1, U_2 が存在する．集合 $U_1 \times Y$ と $U_2 \times Y$ は $X \times Y$ の開集合であり，$w_1 \in U_1 \times Y$, $w_2 \in U_2 \times Y$ かつ $U_1 \times Y \cap U_2 \times Y = \emptyset$ をみたしている．

もし，$x_1 = x_2$ であれば $y_1 \neq y_2$ である．同じような議論で，$X \times Y$ の開集合 $X \times V_1$ と $X \times V_2$ で，

$$w_1 \in X \times V_1,\quad w_2 \in X \times V_2 \text{ かつ } X \times V_1 \cap X \times V_2 = \emptyset$$

をみたすものが存在する．よって，$X \times Y$ はハウスドルフである．

逆に，$X \times Y$ がハウスドルフであれば，その部分空間 $X \times \{y\}$, $\{x\} \times X$ もハウスドルフであり，したがって X と Y もハウスドルフである．▌

こうして，$S^1 \times \cdots \times S^1$ のような空間はハウスドルフとなる．

ハウスドルフ空間の部分空間はハウスドルフで，ハウスドルフ空間の直積もハウスドルフであるが，ハウスドルフ空間の商空間がハウスドルフ空間になるというのは一般的には成立しない．例えば，X をハウスドルフ空間とし，X の閉でない部分集合を A とする（例：$X = \boldsymbol{R}, A = (0, 1)$）．$Y = X/\sim$ とする．ここ

で，～は

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \text{ または } \{x, x'\} \subseteq A$$

によって与えられる同値関係である(直観的には，Y は X において A を1点につぶした空間である；一般に，$Y = X/\sim$ を X/A と表わす)．もし，Y に自然な射影 $g : X \to Y$ による商位相を与えるとすれば，$x_0 \in A$ に対し，$[x_0] \in Y$ の逆像は A であり，これは X で閉でない．それゆえ，点 $[x_0]$ は Y において閉集合ではなく，Y はハウスドルフでない．

ハウスドルフ空間 X の商空間 Y がハウスドルフになるようにするためには，X に条件をつけ加えることが必要になる．一例として次の結果がある．

8.11 定　理

Y を全射 $f : X \to Y$ によって定められる位相空間 X の商空間とする．もし，X がコンパクトかつハウスドルフ，f が閉写像であれば，そのとき Y も(コンパクト)ハウスドルフである．

証明　Y の点は X の点の像で，X の各点は閉集合であるから，f が閉写像であることにより Y の各点も閉集合となる．y_1, y_2 を Y の相異なる点とする．$f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)$ は X の閉部分集合で，$f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \emptyset$ である．各点 $x \in f^{-1}(y_1)$ と各点 $a \in f^{-1}(y_2)$ に対し，X の開集合 $U_{x,a}, V_{x,a}$ で

$$x \in U_{x,a},\ \ y \in V_{x,a} \text{ かつ } U_{x,a} \cap V_{x,a} = \emptyset$$

となるものが存在する．$f^{-1}(y_2)$ は閉でありコンパクトであるから，$f^{-1}(y_2)$ をおおう $\{V_{x,}a\ ;\ a \in f^{-1}(y_2)\}$ の有限部分被覆 $\{V_{x,a}\ ;\ a \in A\}$，但し，A は $f^{-1}(y_2)$ の有限部分集合である，が存在する．とくに，$U_x = \bigcap_{a \in A} U_{x,a}$，$V_x = \bigcup_{a \in A} V_{x,a}$ とすれば，これらは X の開集合で，

$$x \in U_x,\ \ f^{-1}(y_2) \subset V_x \text{ かつ } U_x \cap V_x = \emptyset$$

をみたしている．ところで，$\{U_x\ ;\ x \in f^{-1}(y_1)\}$ は $f^{-1}(y_1)$ の開被覆で，$f^{-1}(y_1)$ はコンパクトである．したがって，有限部分被覆 $\{U_x\ ;\ x \in B\}$，但し，B は $f^{-1}(y_1)$ の有限部分集合である，が存在する．かようにして，集合 $U = \bigcup_{x \in B} U_x$，$V = \bigcup_{x \in B} V_x$ は X の開集合で，

$$f^{-1}(y_1) \subseteq U,\ \ f^{-1}(y_2) \subseteq V \text{ かつ } U \cap V = \emptyset$$

をみたす．

f は閉写像であるから，$f(X-U)$ と $f(X-V)$ は Y の閉集合で，$W_1=Y-f(X-U)$ と $W_2=Y-f(X-V)$ は Y の開集合で $y_1\in W_1$ かつ $y_2\in W_2$ をみたしている．$W_1\cap W_2=\emptyset$ を示せば証明が終る．そこで，$y\in W_1\cap W_2$ であったとする．このとき，$y\notin f(X-U)$ かつ $y\notin f(X-V)$ である．それゆえ，$f^{-1}(y)\cap(X-U)=\emptyset$ かつ $f^{-1}(y)\cap(X-V)=\emptyset$ となる．このことから，$f^{-1}(y)\subseteq U\cap V=\emptyset$，したがって $W_1\cap W_2=\emptyset$ が成立する．∎

系として次の結果がえられる．

8.12　系

もし，X がコンパクト G-空間で G が有限であれば，X/G はコンパクトハウスドルフ空間である．

証明　C を X の閉集合とする．そのとき，

$$\pi^{-1}(\pi(C))=\bigcup_{g\in G} g\cdot C$$

が成立する．ここで，$\pi: X\to X/G$ は自然な射影である．$g\in G$ の X への作用は同相写像であるから，すべての $g\in G$ に対し，$g\cdot C$ は閉集合である．こうして，$\pi^{-1}(\pi(C))$ は閉集合となり，よって $\pi(C)$ は閉であり，π が閉写像であることが示された．∎

例えば，$\boldsymbol{RP}^n$ はコンパクトハウスドルフ空間である．

定理 8.11 のもう 1 つの系として，空間 X と部分集合 $A\subseteq X$ について考えよう．X/A は $X/\sim$ を表わす，但し $\sim$ は

$$x\sim x' \Leftrightarrow x=x' \text{ または } \{x, x'\}\subseteq A$$

によって与えられる X 上の同値関係である．

8.13　系

もし，X がコンパクトハウスドルフ空間で A が X の閉集合であれば，X/A はコンパクトハウスドルフ空間である．

証明　C を X の閉集合とし，$p: X\to X/A$ を自然な射影とする．もし $C\cap A=\emptyset$ ならば，$p(C)=C$ は閉集合である．もし $C\cap A\neq\emptyset$ ならば，$p(C)=p(C-A)\cup p(C\cap A)$ は，

$$p^{-1}(p(C-A)\cup p(C\cap A))=(C-A)\cup A=C\cup A$$

となることから，閉集合となる．こうして，pは閉写像となることが示された．▌

商空間もハウスドルフ空間となるようなハウスドルフ空間に関する他の条件が次の問題集の中にあり，定理 8.11 の逆も与えられている．

8.14 問　　題

(a) $f: X \to Y$をコンパクト空間Xからハウスドルフ空間Yの上への連続な全射とする．Yの部分集合Uが開であるための必要十分条件は$f^{-1}(U)$がXで開であることを証明せよ(ヒント：Yの部分集合Cが閉$\Leftrightarrow f^{-1}(C)$が$X$で閉，を示せ)．$Y$が$f$によって定められる商位相をもつことを示せ．

(b) 空間Yがハウスドルフであるための必要十分条件は$Y \times Y$の対角集合$D \to \{(y_1, y_2) \in Y \times Y\,;\, y_1 = y_2\}$が$Y \times Y$の閉集合となることを証明せよ．

(c) $f: X \to Y$を連続写像とする．Yがハウスドルフであれば，集合$\{(x_1, x_2) \in X \times X\,;\, f(x_1) = f(x_2)\}$が$X \times X$の閉集合となることを証明せよ．

(d) $f: X \to Y$を連続かつ開写像である全射とする．Yがハウスドルフであるためには集合$\{(x_1, x_2) \in X \times X\,;\, f(x_1) = f(x_2)\}$が$X \times X$の閉集合となることが必要十分であることを証明せよ．

(e) Xをコンパクトハウスドルフ空間とし，Yを写像$f: X \to Y$によって定まる商空間とする．Yがハウスドルフであるための必要十分条件はfが閉写像であることを証明せよ．さらに，Yがハウスドルフであるための必要十分条件は集合$\{(x_1, x_2) \in X \times X\,;\, f(x_1) = f(x_2)\}$が$X \times X$の閉集合であることを証明せよ．

(f) $S^1 \times I$上の同値関係$\sim$を$(x, t) \sim (y, s) \Leftrightarrow xt = ys$(ここで，$S^1 \subseteq \boldsymbol{C}$かつ$I = [0,\ 1] \subseteq \boldsymbol{R}$とみなしている)によって与えられるものとする．$S^1 \times I/\sim$が単位円板$D^2 = \{x \in \boldsymbol{R}^2\,;\, \|x\| \leq 1\} = \{x \in \boldsymbol{C}\,;\, |x| \leq 1\}$に通常の位相を与えたものに同相であることを証明せよ．

(g) 単位正方形$X = \{(x_1, y) \in \boldsymbol{R}^2\,;\, 0 \leq x, y \leq 1\}$上の同値関係$\sim$を

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y'),\ \text{または，}\ \{x, x'\} = \{1, 0\}$$

かつ$y = 1 - y'$，または，$\{y, y'\} = \{1, 0\}$かつ$x = 1 - x'$によって与えられ

るものとする(図 8.1 をみよ)．等化空間 $X/\sim$ は $\boldsymbol{R}P^2$ に同相であることを証明せよ．

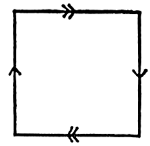


図 8.1

(h) $S^n \subseteq \boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分集合 $S^n{}_+$ を次のように与える．

$S^n{}_+ = \{x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \boldsymbol{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}$．

$f(x_1, \cdots, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n)$ で与えられる写像 $f : \boldsymbol{R}^{n+1} \to \boldsymbol{R}^n$ は $S^n{}_+$ から n 次元閉球体 D^n，$D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n\ ;\ \|x\| \leq 1\}$，への同相写像をひきおこすことを証明せよ．

(i) $\boldsymbol{R}$ 上で $\sim$ を，$x \sim y \Leftrightarrow x-y$ が有理数，と定義する．$\sim$ は同値関係であり，商位相をもつ $\boldsymbol{R}/\sim$ はハウスドルフでないことを証明せよ．

(j) X をコンパクトハウスドルフ空間とし，U を X でない X の開集合とする．$U^\infty \cong X/X-U$ (同相)を証明せよ．

(ヒント：$p : X \to X/X-U$ を自然な射影とし，$h(u) = p(u)(u \in U)$, $h(\infty) = p(X-U)$ で与えられる写像 $h : U^\infty \to X/X-U$ を考えよ．) もし，$x \in X$ で(X がコンパクトハウスドルフ空間で)あるならば，そのとき，次が成立することを導け．

$(X - \{x\})^\infty \cong X$

(k) $S^n \cong (\boldsymbol{R}^n)^\infty \cong D^n/S^{n-1} \cong I^n/\partial I^n$ を証明せよ．

(ヒント：$S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\} \cong \boldsymbol{R}^n \cong D^n - S^{n-1} \cong I^n - \partial I^n$．)

(l) (8.11 の一般化)　Y を全射 $f : X \to Y$ の定める X の商空間とする．X はハウスドルフ空間，f は閉写像，すべての $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y)$ はコンパクトであると仮定する．Y はハウスドルフ空間であることを証明せよ．

(m) X はコンパクトハウスドルフ空間であり，A は X の閉集合であるとする．さらに，A は G-空間，G は有限であると仮定する．X 上の関係 $\sim$ を，$x \sim x' \Leftrightarrow x = x'$ または $\{x, x'\} \subset A$ かつある $g \in G$ が存在して $x = g \cdot x'$ となる，と定める．$\sim$ は X の同値関係であり，$X/\sim$ はハウスドルフ空間であることを証明せよ．

(n) "$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合がコンパクトであるための必要十分条件は有界閉集合である" ことを証明せよ．

(ヒント：定理 7.12，問題 7.13(b)および定理 8.7 を使用せよ．)

9

連結空間

直観的には，空間 X が連結であるとは，それが“ひとかたまり”になっているということである；しかし，“かたまり”を位相的にどのように解釈すべきなのだろうか？　ひとつの“かたまり”の開または閉集合は全体の空間 X のそれぞれ開または閉集合であると要求するのは道理にかなうだろう．つまり，補題4.4により，“かたまり”とは X の開かつ閉集合になっていることを期待すべきだろう．このことから，次のように定義する．

9.1　定　義

位相空間 X が連結であるとは，X の開かつ閉集合は空集合 $\varnothing$ かまたは X 自身であるときをいう．X の部分集合が連結であるとは，誘導位相をもつ空間として連結であるときをいう．

同値な定義として，X が連結とは，X が互いに交わらぬ 2 つの空でない開集合の和集合になっていないときである，というのがある．これが，実際，同値な定義であることは次の結果による．

9.2　定　理

空間 X が連結であるための必要十分条件は X が互いに交わらぬ 2 つの空でない開集合の和集合でないことである．

証明　X が連結であり，X の互いに交わらぬ 2 つの開集合 X_1, X_2 により，$X=X_1\cup X_2$ となったとする．そのとき，$X-X_1=X_2$ であり，したがって X_1 は共に開かつ閉集合となる．よって，$X_1=\varnothing$ または X，そして，それにしたがい

$X_2=X$ または $\emptyset$ である．いずれにせよ，X は X の互いに交わらぬ 2 つの空でない開集合の和集合にはならない．

逆に，X が互いに交わらぬ 2 つの空でない開集合の和集合でないと仮定する．$U\subseteq X$ とする．U が開かつ閉集合であるならば，$X-U$ は開かつ閉集合である．しかし，X はこのとき，互いに交わらぬ 2 つの開集合 U と $X-U$ の和集合であるから，U または $X-U$ は空集合，すなわち $U=\emptyset$ または $U=X$，でなくてはならない．▌

例えば，$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $S^0=\{\pm 1\}$ は連結でない．なぜなら，$\{+1\}, \{-1\}$ はそれぞれ S^0 の開かつ閉集合である；すなわち，いいかえれば，S^0 は $\{+1\}$, $\{-1\}$ という互いに交わらぬ 2 つの空でない開集合の和集合となるからである．$\boldsymbol{R}$ の連結な部分集合の例は閉区間 $[a,b]$ である．このことは証明を要する定理である．この証明の前に，もう少し例をみることにしよう．そのような例から“連結性を直観的に考えるときに注意しなくてはならない”ことがわかるだろう．

X を実数の全体で，位相 $\{\emptyset\}\cup\boldsymbol{R}\cup\{(-\infty,x)\,;\,x\in\boldsymbol{R}\}$ をもつとする．このとき，X のどのような部分集合も連結である．これを示すために，S を X のかってな部分集合とする．F が S の空でない開かつ閉集合であるとする．つまり，F は X の中の開集合 U と閉集合 C により，$F=U\cap S=C\cap S$ と書ける．ここで，$U=(-\infty,b)$, $C=[a,\infty)$ と表わされる．

$F=U\cap S=C\cap S$ であるから，$x\in S$ であれば $x<b$ かつ $x\geq a$ となる（もしも，$x\geq b$ となる $x\in S$ が存在すれば，$C\cap S\neq U\cap S$；同様に，もし $x<a$ なる $x\in S$ が存在すれば，$U\cap S\neq C\cap S$ となるから）．こうして，$S\subseteq[a,b)$ となり，$F=S$，つまり，S が連結であることが示された．

今度は X を実数の全体とし，位相 $\mathscr{T}$ を次のように定義する：$S\in\mathscr{T}\Leftrightarrow$ 各 $s\in S$ に対し，$[s,t)\subset S$ となる $t>s$ が存在する．この場合には，X の空でない連結部分集合は 1 点（単一集合）に限る．これをみるために，T を X の空でない連結部分集合とし，x を T の点とする．X の部分集合 $[x,x+\varepsilon)$ はすべての $\varepsilon>0$ に対し開かつ閉集合である（問題 2.6(d)）．だから，$[x,x+\varepsilon)\cap T$ は T の開かつ閉集合である．T は連結で，$[x,x+\varepsilon)\cap T\neq\emptyset$ であるから，すべての $\varepsilon>0$ に対し $[x,x+\varepsilon)\cap T=T$ が成立する．しかし，このことが成立するのは $T=\{x\}$

のときに限られる．明らかに，1点は連結であり，したがって X の空でない連結部分集合は1点に限る．さて，(通常の位相をもつ) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $[a,b]$ が連結であるという証明に入ろう．

9.3 定　理

閉区間 $[a,b]\subseteq\boldsymbol{R}$ は連結である．

証明　$[a,b]$ が，$[a,b]$ の互に交わらない2つの開集合 U, V の和集合であるとする．$a\in U$ であると仮定する．U, V は $[a,b]$ で閉でもあり，$[a,b]$ は $\boldsymbol{R}$ で閉であるから，U, V は $\boldsymbol{R}$ で再び閉である．h を集合 $\{u\in U|u<v(^{\forall}v\in V)\}$ の上限とする (a はこの集合に属し，b はその上界だから h は存在する)．U は $\boldsymbol{R}$ で閉であるから，$h\in U$ が成立する．ところが，すべての $\varepsilon>0$ に対し，$(h-\varepsilon, h+\varepsilon)\cap V\neq\emptyset$ である (そうでなければ，h は上限でなくなるから)．よって，補題2.7により，$h\in\overline{V}$ となる．しかし，V は $\boldsymbol{R}$ で閉であり，$h\in V$ となる．$h\in U\cap V$ は $U\cap V=\emptyset$ であることに矛盾し，$[a,b]$ が連結であることが示された．▌

9.4 定　理

連結集合の連続写像による像は連結である．

証明　X が連結であり，$f: X\to Y$ が連続全射であるとする．もし，U が Y で開かつ閉であれば，$f^{-1}(U)$ は X で開かつ閉である．このことは，$f^{-1}(U)=\emptyset$ または X，そして，$U=\emptyset$ または Y を意味している．よって，Y は連結である．▌

9.5 系

X と Y が同相な位相空間であれば，X が連結 $\Leftrightarrow Y$ が連結．

定理9.4から，円周 S^1 が連結であることが示せる．連続全射 $f:[0,1]\to S^1$ が，$f(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\in S^1\subseteq\boldsymbol{R}^2$ によって与えられるからである．

$[a,b), (a,b]$ そして (a,b) のような $\boldsymbol{R}$ の区間が連結であることを示すのに次の結果を使用する．

9.6 定理

$\{Y_j\,;\,j\in J\}$ が空間 X の連結部分集合の集まりであるとする．もし，$\bigcap_{j\in J} Y_j\neq\emptyset$ ならば，$Y=\bigcup_{j\in J} Y_j$ は連結である．

証明 U を Y の空でない開かつ閉集合とする．このとき，ある $i\in J$ に対し，$U\cap Y_i\neq\emptyset$ であり，$U\cap Y_i$ は Y_i の開かつ閉集合となる．ところが，Y_i は連結であるから $U\cap Y_i=Y_i$，したがって $Y_i\subseteq U$ が成立する．この集合，Y_i はすべての他の Y_j, $j\in J$ と交わるから，U はすべての Y_j, $j\in J$ と交わる．上の議論をくりかえし，すべての Y_j, $j\in J$ に対し，$Y_j\subseteq U$，したがって $Y=U$ が成立する．▌

$\boldsymbol{R}$ の部分集合 $[a,b),(a,b]$ そして (a,b) が連結であることは，定理 9.3，系 9.5 および

$$[a,b)=\bigcup_{n\geq 1}[a,b-(b-a)/2^n]$$

等の事実による．同様に，$\boldsymbol{R}$ 自身，$[a,\infty),(-\infty,b],(-\infty,b),(a,\infty)$ という形の区間が連結となる．

次に示すこの節最後の結果は，連結空間の直積に関するものである．

9.7 定理

X と Y を位相空間とする．そのとき，次の同値が成立している．

X および Y が連結である $\Leftrightarrow X\times Y$ が連結である．

証明 X および Y が連結であるとする．すべての $x\in X$, $y\in Y$ について，$X\cong X\times\{y\}$, $Y\cong\{x\}\times Y$ であるから，$X\times\{y\}$, $\{x\}\times Y$ は連結である．ところで，$(X\times\{y\})\cap(\{x\}\times Y)=\{(x,y)\}\neq\emptyset$ であるから，$(X\times\{y\})\cup(\{x\}\times Y)$ は定理 9.6 により連結である．$X\times Y$ をある固定点 $y\in Y$ に対し，

$$X\times Y=\bigcup_{x\in X}((X\times\{y\})\cup(\{x\}\times Y))$$

と表わせる．$\bigcap_{x\in X}((X\times\{y\})\cup(\{x\}\times Y))\neq\emptyset$ であるから，$X\times Y$ は連結である．▌

上の結果から $\boldsymbol{R}^n$ は連結となる．次の問題で，S^n および $\boldsymbol{RP}^n$ が $n\geqq 1$ に対し連結であることをみる．

9.8 問題

(a) 有理数の全体 $\boldsymbol{Q}\subseteq\boldsymbol{R}$ は連結でないことを証明せよ．

(b) $\boldsymbol{R}$ の部分集合が連結であるための必要十分条件は，それが区間であるか1点であることを証明せよ．（$\boldsymbol{R}$ の部分集合 A が区間であるとは，A は少なくとも2点を含み，もし $a, b \in A$, $a < b$ について $a < x < b$ であれば，$x \in A$ となるときをいう）．

(c) X を少なくとも2点を含む集合とする．次のことを証明せよ．

(i) X に離散位相が与えられているとき，X の連結部分集合は1点のみである．

(ii) X に自明位相が与えられているとき，X のすべての部分集合は連結である．

(d) 次の $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合のうち，連結なものはどれか？

$\{x ; \|x\| < 1\}$，$\{x ; \|x\| > 1\}$，$\{x ; \|x\| \neq 1\}$．

次の $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合のうち，連結なものはどれか？

$\{x ; x_1{}^2 + x_2{}^2 - x_3{}^2 = 1\}$，$\{x ; x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = -1\}$，$\{x ; x_1 \neq 1\}$．

(e) 位相空間 X が連結であるための必要十分条件は，X から（少なくとも2点を有する）離散空間への連続写像がつねに定値写像となることを証明せよ．

(f) A が X の連結部分集合であり，$A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$ とする．Y は連結であることを証明せよ．

(g) Y_0 および $\{Y_j ; j \in J\}$ が X の連結部分集合であるとする．もし $Y_0 \cap Y_j \neq \emptyset$ $(\forall j \in J)$ であれば $Y = Y_0 \cup (\bigcup_{j \in J} Y_j)$ は連結であることを証明せよ．

(h) $\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ が $n \geq 1$ のとき，連結であることを証明せよ．S^n および $\boldsymbol{RP}^n$ が $n \geq 1$ に対し連結であることを示せ（ヒント：$f(x) = x/\|x\|$ によって定まる $\{f : \boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$ を考えよ）．

(i) $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 A と B を次のように定義する：

$A = \{(x, y) ; x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}$,

$B = \{(x, y) ; 0 < x \leq 1,\ y = \cos(\pi/x)\}$.

$X = A \cup B$ が連結であることを証明せよ（ヒント：A と B が連結であることを証明せよ．それから，X で開かつ閉である部分集合 U, V に対し，$X = U \cup V$ であるとする．最後に，A のある点が U に属すると仮定せよ）．

(j) A, Bを次のように定義された$\boldsymbol{R}^2$の部分集合とする.

$$A=\left\{(x, y)\ ;\ \frac{1}{2}\leq x\leq 1,\ y=0\right\},$$

$$B=\left\{(x_1, y)\ ;\ 0\leq x\leq 1,\ y=\frac{x}{n},\ 但し,\ n\in\boldsymbol{N}\right\}.$$

$X=A\cup B$が連結であることを証明せよ.

(k) “代数的位相幾何学への第一歩” Xを位相空間とし, $H(X)$をXから$\boldsymbol{Z}_2$(2点の集合$\{0, 1\}$で, 離散位相をもつ位相空間)への連続写像の全体のなす集合とする. もし, $f, g\in H(X)$であれば, $f+g$を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\bmod 2\quad (x\in X)$$

により定義する. $f+g$が連続であることを証明し, $H(X)$はこの和に関してアーベル群となることを証明せよ. Xが連結であるための必要十分条件は$H(X)$が位数2の巡回群に同型となることを証明せよ. 位相空間X_kで, $H(X_k)$が$(\boldsymbol{Z}_2)^k$に同型になるものを構成せよ.

10

パンケーキ問題

この章では，いわゆる“パンケーキ問題”を考えてみることにより，今までの諸章の結果の卑近な応用を与える．大ざっぱには，第一の問題は“1つの皿の上に2つの(どんな形でもよい)パンケーキがのっている，ナイフで一切りして，両方とも丁度半分になるように切ることができることを証明せよ”というものである．第二の問題は“1個のパンケーキを切口が互いに直交するように2回切って，大きさの同じな4つの部分に分けることができることを証明せよ”というものである．これらの証明は，中間値の定理の形の議論にもとづいている．

10.1　補　　題

もし$f: I=[0,1]\to \boldsymbol{R}$が連続関数で，積$f(0)\cdot f(1)$が有限で，非正($-\infty < f(0)\cdot f(1)\leqq 0$)であれば，点$t\in I$が存在し，$f(t)=0$となる．

証明　すべての点$t\in I$で，$f(t)\neq 0$とする．とくに，$f(0)\cdot f(1)<0$と仮定する．関数$g: I\to\{\pm 1\}=S^0$を$g(t)=\dfrac{f(t)}{|f(t)|}$によって定める．これは明らかに連続で全射である($f(0)\cdot f(1)<0$であるから)．ところが，$I$は連結であるが$S^0$は連結でない．これは，連結空間の連続写像による像が連結であるという事実に矛盾している．▌

系として，次の“固定点定理”がえられる．

10.2　系

$f: I\to I$を連続関数とする．そのとき，ある$t\in I$が存在して，$f(t)=t$と

なる．

証明 もし，$f(0)=0$ または $f(1)=1$ なら証明は終っている．そこで，$f(0)>0$, $f(1)<1$ と仮定して，関数 $g(t)=f(t)-t$ を考える．これは連続であり，$g(0)\cdot g(1)<0$ をみたしている．補題 10.1 によって，かくして，ある $t\in I$ に対して $g(t)=0$, したがって $f(t)=t$ となる．▮

10.3 系

円周 S^1 から実数全体 $\boldsymbol{R}$ へのいかなる連続関数も，少なくとも 1 組の直径対点を同じ点にうつしている（ある $t\in S^1$ に対し，$f(t)=f(-t)$ となる）．

証明 すべての $t\in S^1$ に対し，$f(t)\neq f(-t)$ とする．$h: S^1\to\boldsymbol{R}$ を $h(t)=f(t)-f(-t)$ とする．また，$e: I\to S^1$ を $e(t)=\exp(\pi it)$ とする．明らかに，he は連続である．ところで次が成立する．

$$he(0) = h(1) = f(1)-f(-1)$$
$$he(1) = h(-1) = f(-1)-f(1) = -he(0).$$

だから，補題 10.1 によって点 $t\in I$ が存在し，$he(t)=0$ したがって $x=e(t)\in S^1$ が存在して，$h(x)=0$ すなわち $f(x)=f(-x)$ となる．▮

系 10.3 の物理学的な意味づけがある．

10.4 系

地球上で，与えられた時刻と与えられた大円で，同じ温度をもつ対蹠点の一組が存在している．

対蹠点とは直径対点のことに他ならない．この結果は勿論一般化できる；第 20 章をみよ．

それでは第一パンケーキ問題を正確に述べよう．

10.5 定　理

A と B をユークリッド平面上の有界域（有界部分集合）とする．このとき，平面上の直線で，それぞれ面積が丁度半分になるように A および B を 2 分するものが存在する．

A と B は重なっていてもかまわないことに注意しておく．すなわち，パンケ

ーキは重なっていてもかまわないのである．さらに，連結である必要もない．つまりパンケーキはいくつかにわかれていても良いのである．

証明　S を中心 $(0,0)\in \boldsymbol{R}^2$ の円周で，A と B をその内部に含むものとする（A, B は有界だから S は存在する）．尺度を変えることによって，S の直径は1であるとしてかまわない．各点 $x\in S$ に対し，x を通る直径 D_x を考え，D_x 上の点で，x から距離 $t(t\in I)$ にある点を通り，D_x に直交する直線を L_t とする；図10.1をみよ．

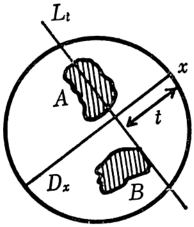


図 10.1

$g_1(t)$ を L_t からみて点 x の側にある A の部分の面積とし，$g_2(t)$ をその反対側の A の部分の面積とする（$g_1(0)=g_2(1)=0$ に注意する）．g_1 と g_2 が I から $\boldsymbol{R}$ への連続関数となるのは明らかである．関数 $f: I\to \boldsymbol{R}$ を $f(x)=g_2(t)-g_1(t)$ と定義する．これは連続で，$f(0)=-f(1)$ すなわち $f(0)f(1)<0$ をみたしている．補題10.1によって，ある点 $t\in I$ が存在して $f(t)=0$ となる．この点 t が唯一つ定まるとは限らない．g_2 と $-g_1$ は単調減少関数である（このことは自明であろう）から，$f=g_2-g_1$ も単調減少である．よって，閉区間 $[a,b]$ 上または唯1点 $t=c$ で $f(t)=0$ となる．前者の場合に $h_A(x)=(1/2)(a+b)$，後者の場合に $h_A(x)=c$ とする．いいかえれば，D_x 上，x から $h_A(x)$ の距離にある点を通り，D_x に直交する直線は A の面積を2等分している．

$$h_A(-x) = 1-h_A(x)$$

であることに注意しよう．また，$h_A: S^1\to I$ が連続関数である（いつもやる方法；x を少し動かすと $h_A(x)$ がどう変るかをみる）ことにも注意しよう．

同じ方法によって，A の代りに B を使用して，関数 $h_B: S^1\to I$ が定義される．いまや $h(x)=h_A(x)-h_B(x)$ によって関数 $h: S^1\to I$ が定義され，h_A と h_B が連続だから，これも連続である．ところで，すべての点 $x\in S^1$ に対して $h(x)=-h(-x)$ である．他方，系10.3によって，ある点 $y\in S^1$ が存在して，$h(y)=h(-y)$ となる．よって，$h(y)=0$ であり，$h_A(y)=h_B(y)$ となっている．つまり，y から $h_A(y)$ の距離にある D_y 上の点を通り，D_y に直交する直線は A の面積および B の面積を2等分している．▌

上の定理は高次元，つまり $\boldsymbol{R}^n$ の中の n 個の有界域，に対し一般化される；

$n=3$ に対しては第20章をみよ．

第二のパンケーキ問題は次のように正確に述べられる．

10.6 定　理

もし，A が平面上の有界域であれば，A の面積を4等分する互いに直交する2直線の組が存在する．

証明　定理10.5の証明のように，中心が $(0.0)\in \boldsymbol{R}^2$ で直径が1である円周 S の中に A が入っているとしてよい．各点 $x\in S$ に対し，L_x を x から $h_A(x)$ の距離にある D_x 上の点で D_x に直交する直線とする(とくに，L_x は A の面積を等分する)．x から反時計まわりに角度 $(1/2)\pi$ のところにある S の点を y とする(すなわち，$y=ix=x\sqrt{-1}$)．そこで，y から距離 $h_A(y)$ にある D_y 上の点で D_y に直交する直線を M_x とする(再び，M_x は A の面積を2等分している)．A の4つの部分を反時計まわりの順序に，$A_1(x), A_2(x), A_3(x), A_4(x)$ と表わす；図10.2をみよ．$A_i(x)$ の面積を $g_i(x)$ とすれば，そのとき

$$g_1(x)+g_2(x) = g_3(x)+g_4(x),$$
$$g_4(x)+g_1(x) = g_2(x)+g_3(x)$$

が成立し，このことから，$g_1(x)=g_3(x)$ および $g_2(x)=g_4(x)$ がえられる．勿論，各 g_1, g_2, g_3 そして g_4 は S から $\boldsymbol{R}$ への連続関数である．

$$f(x) = g_1(x)-g_2(x) = g_3(x)-g_4(x)$$

によって，連続関数 f を定義する．次が成立することに注目しよう．

$$\begin{aligned} f(ix) &= g_1(ix)-g_2(ix) \\ &= g_2(x)-g_3(x) \\ &= g_2(x)-g_1(x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

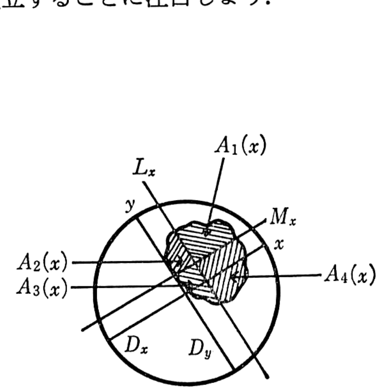


図 10.2

いまや，関数 $f\sqrt{e}: I\to \boldsymbol{R}$，但し $\sqrt{e}: I\to S^1$ は $\sqrt{e(t)}=\exp(\pi it/2)$ と定められている，に対し補題10.1を適用して，求める結論がえられる．▌

パンケーキ問題の解は一種の存在定理である；それは要求された切り方が存在して

いることを主張している．しかしながら，それはどこで切ったらよいのかということについてはなにも教えてくれない．一般には，正確な切り口の位置をみつけだすのは困難であろう；容易にみつけられる一例が次の問題で与えられている．

10.7 問　　題

(a) 1つの皿の上に2つのパンケーキがのっているとしよう．1つは正 $2n$ 角形で，もう1つは正 $2m$ 角形の形をしていたとしよう．この場合に，ナイフの一切りで，両方を丁度2等分するように切ってみなさい．

(b) (定理 10.5 の別証明) 10.5 の記法をつかって，はじめに，各点 $x \in S$ に対し，D_x に直交する直線 L_x で A を2等分するものが存在することを示しなさい．この直線 L_x は B を2つの部分に分ける；$k_1(x), k_2(x)$ をそれぞれ，x の側，その反対側の部分の面積とする．$k(x)=k_2(x)-k_1(x)$ とし，$k : S \to \boldsymbol{R}$ が連続であることを示し，定理 10.5 を導け．

11

多様体と曲面

この章では位相空間の特殊な類；局所的には丁度ユークリッド空間のようになっているもの，に眼を向けることにする．

11.1 定　義

n を非負整数とする．**n 次元多様体**とはハウスドルフ空間で，各点が n 次元開円板 $\mathring{D}^n=\{x\in \boldsymbol{R}^n\ ;\ \|x\|<1\}$ に同相な開近傍をもつときをいう．$\mathring{D}^n\cong \boldsymbol{R}^n$ であるから，各点が $\boldsymbol{R}^n$ に同相な開近傍をもつとしても同値な条件となる．簡単に，**n-多様体**ということにする．

$\boldsymbol{R}^0$ は1点であるから，離散位相をもついかなる空間 X も 0-多様体である(離散位相をもつ空間はハウスドルフで，$x\in X$ に対し，$\boldsymbol{R}^0$ に同相な x の開近傍として $\{x\}$ を選べる)．0-多様体以外では，たぶん最も単純な例は $\boldsymbol{R}^n$ または $\mathring{D}^n$ それ自身であろう．また，$\boldsymbol{R}^n$ のどのような開集合も n-多様体である：もしも U が $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であり，$u\in U$ であれば，$\varepsilon>0$ が存在して，$u\in B_\varepsilon(u)\subseteq U\subseteq \boldsymbol{R}^n$ となり，そして勿論 $B_\varepsilon(u)\cong \mathring{D}^n$ となる．

円周 S^1 は 1-多様体である．$S^1\subseteq \boldsymbol{C}$ が次のように定義されているとしよう．

$$S^1=\{\exp(2\pi it)\ ;\ t\in I\}.$$

もし，$x=\exp(2\pi i\theta)\in S^1$ であれば，そのとき，

$$\begin{aligned} x\in S^1-\{-x\} &= S^1-\left\{\exp\left(2\pi i\left(\theta-\frac{1}{2}\right)\right)\right\} \\ &=\left\{\exp(2\pi it)\ ;\ \theta-\frac{1}{2}<t<\theta+\frac{1}{2}\right\} \\ &\cong\left(\theta-\frac{1}{2},\ \theta+\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\cong (0,1) \cong \mathring{D}^1$$

が成立し，各点は $\mathring{D}^1$ と同相な近傍をもっている．明らかに S^1 はハウスドルフであり，したがって，S^1 は 1–多様体である．さらに，一般に，S^n は n–多様体である．これをみるために，立体射影の考え方を紹介しよう．実際，それは $S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ から $\boldsymbol{R}^n$ への同相写像になっている．次のように定義されるものである： $x\in S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ に対して，$(0,0\cdots,1)$ から x への $\boldsymbol{R}^{n+1}$ における直線をひき，$\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1}\ ;\ x_{n+1}=0\}\subseteq\boldsymbol{R}^{n+1}$ と交わるまで延長する．その交わりの点が一意的に $\varphi(x)\in\boldsymbol{R}^n$ を定めている(図 11.1 をみよ)．

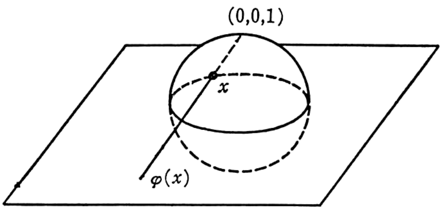


図 11.1

φ が連続で全単射であることをみるのは，少なくとも直観的には難しくないだろう．また $\phi=\varphi^{-1}$ も容易に定義され，連続であることがわかる．φ に対する正確な式を与えるのも困難ではない；$(0,\cdots,0,1)$ と x を通る $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の直線の方程式を書き下し，この直線上で $x_{n+1}=0$ である点をみつけるだけでよいのである．読者は直ちに次式をみつけることだろう．

$$\varphi(x_1,x_2\cdots,x_{n+1})=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\frac{x_2}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right).$$

逆写像 $\phi:\boldsymbol{R}^n\to S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ は次のように与えられる．

$$\phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{1+||x||^2}(2x_1,2x_2,\cdots,2x_n,||x||^2-1).$$

φ 及び ϕ が連続であり，$\varphi\phi=1$, $\phi\varphi=1$ が成立することを検証するのは読者に委ねよう．

こうして，かってな点 $x\in S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ が，$\mathring{D}^n$ に同相な近傍，つまり，$S^n-\{(0,\cdots,0,1)\}$ をもつことになった．最後に，点 $(0,\cdots,0,1)$ は近傍 $S^n-\{(0,$

$\cdots, 0, -1)\}$ をもち，これは写像 φ' によって $\boldsymbol{R}^n$ に同相である，但し，

$$\varphi'(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right),$$

こうして，S^n が本当に n-多様体であることが示された．

S^n が n-多様体であるのをみるもう１つの方法は，まず，点 $(0, \cdots, 0, 1) \in S^n$ と

$$U = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \ ; \ x_{n+1} > 0\}$$

によって与えられる $(0, 0, \cdots, 0, 1)$ の近傍 U に注目することによる．この近傍 U は正射影，いいかえれば，$(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ によって与えられる写像 $U \to \mathring{D}^n \subset \boldsymbol{R}^n$ によって $\mathring{D}^n$ に同相になる．一般に，$x \in S^n$ に対しては，U_x として，

$$U_x = \{y \in S^n \ ; \ \|x-y\| < \sqrt{2}\}$$

をとれば，明らかに，x の S^n における開近傍である．$\boldsymbol{R}^{n+1}$ において原点 0 と x を通る直線に直交し，0 を通る n-平面への正射影が U_x と $\mathring{D}^n$ の間の同相写像を与え，S^n が n-多様体であることを示している．

n-多様体をその定義でハウスドルフであるとしたのは重要である．当然，もしも X が，その各点で $\boldsymbol{R}^n$ と同相な近傍が存在する空間であるならば，X はハウスドルフであるかという疑問が生ずる．簡単な例からわかるように，答は否定的である．X を集合

$$X = \{x \in \boldsymbol{R} \ ; \ -1 < x \leq 2\}$$

とし，位相 $\mathcal{U}$ を，$U \in \mathcal{U}$ であることを，$U = \emptyset, U = X$ または U が

(α, β) 　　$-1 \leq \alpha < \beta \leq 2$,

$(\alpha, 0) \cup (\beta, 2]$ 　　$-1 \leq \alpha < 0$, $-1 \leq \beta < 2$

の形の集合のかってな和集合であると定める．$(\beta, 2]$ の形の集合はこの位相空間 X の開集合ではないから，X は $\boldsymbol{R}$ の部分空間としての位相をもっていない．直観的には，X の正しい図が図 11.2(*a*) または (*b*) で与えられる．このことは，$\{2\}$ が $\{0\}$ にいくらでも近い (i.e., いかなる $\{2\}$ を含む開集合も，ある α に対し，$(\alpha, 0)$ を含んでいる) ということに

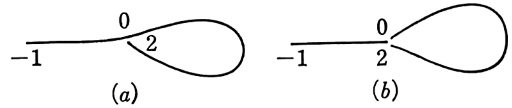


図 11.2

よる．明らかに，X はハウスドルフではない．なぜなら，$\{2\}$ のいかなる開近傍も $\{0\}$ のすべての開近傍と交わるからである．他方，X のあらゆる点が $\boldsymbol{R}^1$ と同相な近傍をもっている．もしも，$x \in X$ かつ $x \neq 2$ であればこのことは明らかだろう．もし，$x=2$ であれば，そのとき，

$$N=\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right]$$

は $\{2\}$ の近傍であるが，これはまた，

$$f(y)=\begin{cases} 2y, & -\dfrac{1}{2}<y<0, \\ 4-2y, & \dfrac{2}{3}<y\leq 2 \end{cases}$$

によって定義される写像 $f: N \to (-1,1)=\mathring{D}^1$ によって，$\mathring{D}^1$ に同相である．読者は，f が連続であり，かつ，逆写像 $g:(-1,1) \to N$ が，

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2}x, & -1<x<0, \\ 2-\dfrac{1}{2}x, & 0\leq x<1 \end{cases}$$

で与えられる全単射であることを検証して欲しい．

こうして，定義 11.1 において，ハウスドルフ条件は，全く不必要なものではない．図 11.2 に示されているような，直観的に局所的にユークリッド空間のようには思えない空間を除外する条件なのである．ハウスドルフ条件を加えるもう 1 つの理由は，おそらく，n–多様体については，それが，十分大きな N に対し，ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の（局所的には $\boldsymbol{R}^n$ のような）部分空間であると考えようとする点にあるだろう．この場合には，ハウスドルフ条件は，とり囲む空間 $\boldsymbol{R}^N$ から継承されている．事実，“もしも，M がうまい n–多様体（例えば，コンパクトな）であれば，M はあるユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分空間に同相になる” という定理が知られている．コンパクト多様体の場合については，問題 11.2(f) 及び (g) をみよ．

多様体のさらに多くの例については，もしも，M が m–多様体で，N が n–多様体であるならば，積 $M \times N$ が $(m+n)$–多様体であることに注目しよう．なぜなら，$\mathring{D}^m \times \mathring{D}^n \cong \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^n \cong \boldsymbol{R}^{m+n} \cong \mathring{D}^{m+n}$ であり，ハウスドルフ空間の直積はハウスドルフになるからである．こうして，$S^1 \times S^1$ は 2–多様体であり，も

っと一般に，$\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}$ が n-多様体になる．

実射影空間 $\boldsymbol{R}P^n$ は n-多様体である．このことをみるのに，点 $x\in S^n$ を点 $\{x, -x\}\in\boldsymbol{R}P^n$ にうつす写像 $p: S^n\to\boldsymbol{R}P^n$ を考えよう．U_x を $x\in S^n$ の開近傍で，$\mathring{D}^n$ に同相であり，直径が $\sqrt{2}$ より小であるものとする．このとき，$p(U_x)$ は $\{x, -x\}\in\boldsymbol{R}P^n$ の開近傍である．というのは，p は連続な開写像であり（定理 5.12），かつ，もし，U が S^n の十分小さな区域であれば，そのとき，$p|U: U\to p(U)$ は全単射となるからである．もっと一般に，X を G-空間とし，G が有限群であるとする．G が X に自由に作用するとは，すべての $x\in X$ およびすべての $g\in G$, $g\neq 1$ に対し，$g\cdot x\neq x$ となるときをいう．もしも，G が X に自由に作用するとすれば，X がコンパクト n-多様体であれば，X/G もそうなる；逆に，X/G が n-多様体であれば，X もそうなっている．詳細は読者に委ねる．

もう 1 つの例として，図 11.3 に示されている等化空間 M を考えよう．それは 8 角形 X から図示されているように辺を同一視してえられる．$p: X\to M$ を自然な射影とする．

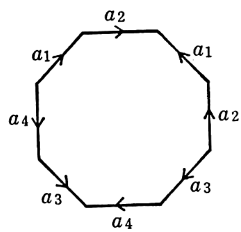


図 11.3

もし，点 $x\in M$ で，$p^{-1}(x)$ が X の内部の点であれば，x は明らかに $\mathring{D}^2$ に同相な近傍をもっている；実際，$p(\mathring{X})$ がそのような近傍である．点 $x\in M$ で，$p^{-1}(x)$ が X の辺に属するが，X の頂点でない点からなるとすれば，x が $\mathring{D}^2$ と同相な近傍をもつのを困難なしにみることができる；図 11.4 をみよ．

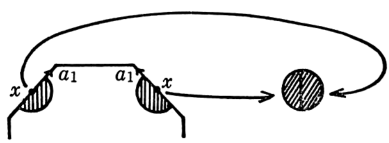


図 11.4

最後に，$p^{-1}(x)$ が X の頂点からなるとすれば，x の近傍 N_x で $\mathring{D}^2$ に同相であるものが図 11.5 のようにとれる．$p^{-1}(N_x)$ は，適当な $\varepsilon>0$ に対し，$p^{-1}(x)$ から ε より小さな距離にある X の点からなる．

直観的に，M がハウスドルフであることをみるのは難しくはないし，読者は困難なしにこのことを示せるにちがいない．代数的に示すのが好きな人のために，次のような証明を与えておこう．A を X の辺の全体を表わすとする．A を $\left(\bigcup_{i=1}^{8}A_i\right)\cup Y$ と表わす．但し，A_i は X の（両端点も含めた）辺であり，Y は X

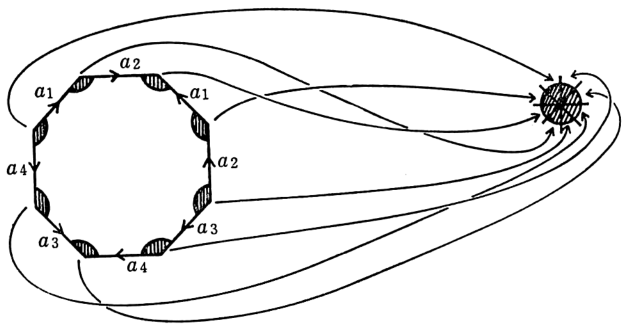


図 11.5

の 8 個の頂点を表わす．C を X の閉集合とすれば，そのとき次が成立する．

$$p^{-1}(p(C)) = p^{-1}p((C-A)\cup(C\cap Y)\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}(C\cap A_i))$$

$$= (C-A)\cup p^{-1}p(C\cap Y)\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}p^{-1}p(C\cap A_i)$$

$$= (C-A)\cup\varepsilon Y\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}((C\cap A_i)\cup B_i),$$

但し，εY は $C\cap Y$ が空でないとき Y, 空であるとき $\emptyset$ とする．集合 B_i は $C\cap A_i$ に同相な A の 1 つの部分空間である．実際，もし，辺 A_i が辺 A_j と M において同一視されているならば，B_i は，$p(B_i)=p(C\cap A_i)$ であるような $C\cap A_i$ に同相な A_i の部分空間である ($p^{-1}p(C\cap A_i)\cap A_j=B_i\cup(\varepsilon Y\cap A_j)$ であることに注意する)．こうして次のことがわかる．

$$p^{-1}p(C) = C\cup\varepsilon Y\cup\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right).$$

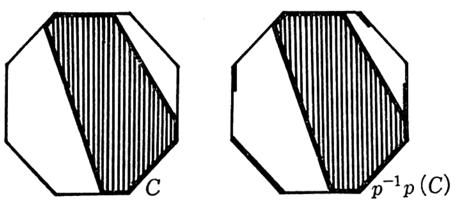


図 11.6

図 11.6 をみよ．

部分空間 B_i が閉集合 $C\cap A_i$ と同相であることから，この B_i, $i=1,\cdots,8$ は(ある j に対し) A_j の閉集合であり，X の閉集合となる．ゆえに，$p^{-1}p(C)$ は閉集合で，したがって，商位相の定義により，$p(C)$ も閉集合である．したがって，$p: X\to M$ は閉写像である．X は明らかにコンパクトハウスドルフ空間であるから，定理 8.11 によって，M もまたコンパクトハウスドルフ空間で，M は確

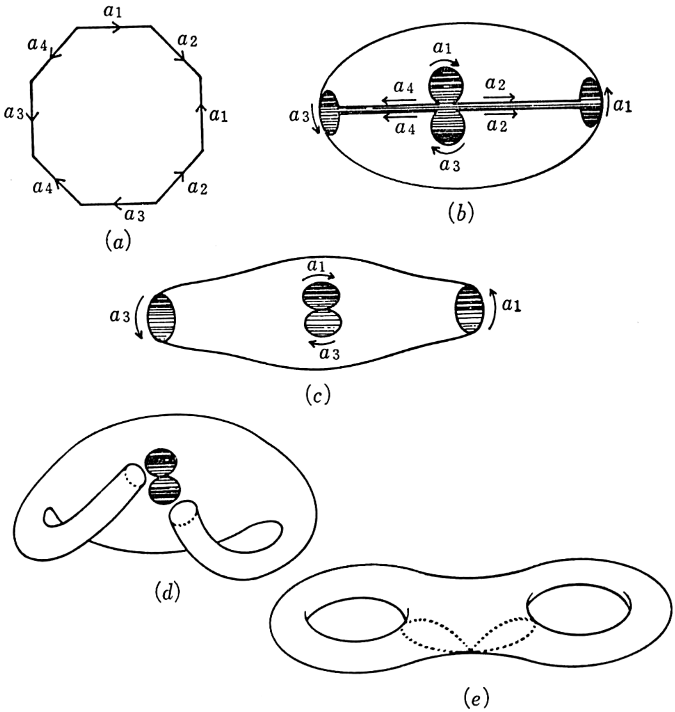


図 11.7

かに 2-多様体である．

図 11.3 の同一視を実際に我々の 3 次元の世界で行うことができる．これは図 11.7 で示されている．最後にできた図形は 2 重トーラスと呼ばれる．図 11.3 の 2-多様体 M を実現するもう 1 つの方法として，最初に，図 11.8(*a*) のように，1 点の開円板近傍をとり除いてみよう．そこで，2 つの辺を同一視して a_1 とすれば，図 (*c*) がえられる．図 (*d*) の影のついたところ Y を考えよう．これは図 (*e*) で示された $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間に同相である．そこで，$0 \leq a < b \leq 1$ とし，

$$f(x, y) =$$

$$\begin{cases} (x(a+2y(b-a))/b, y) \quad , & 0 \leq x \leq b \text{ かつ } y \leq 0 \\ \left(\dfrac{(x-b)(1-a-2y(b-a))}{1-b} + a + 2y(b-a), y\right), & b \leq x \leq 1 \text{ かつ } y \leq 0, \\ \left(\dfrac{xa}{b}, y\right) \quad , & y \geq 0 \end{cases}$$

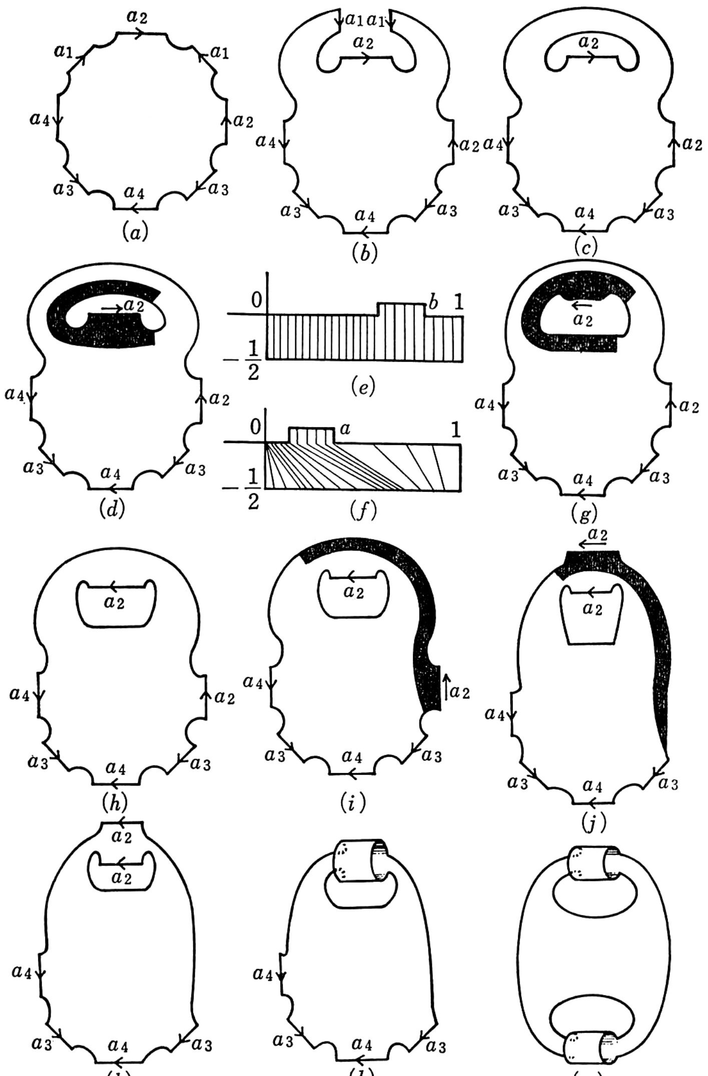


図 11.8

で定められた写像 f は図 11.8(e) と (f) で示された空間の間の同相写像である．f は隆起部分のない 3 つの辺上では恒等写像になっている．よって，Y から Y への同相写像で，a_2 を含まない Y の 3 辺で恒等写像になっているものが存在する．Y のこの同相写像と (d) の影のついていないところの恒等写像を使用して，(d) と (g) の間の同相写像がえられる．こうして，(c) と (h) は同相になる．同じようにして，(i) と (j) の影の部分に同相写像を定義して，(h) と (k) は同相になる．a_2 上の同一視を行ない (l) がえられる．同様に，もとの (a) に同相な (m) がえられる．

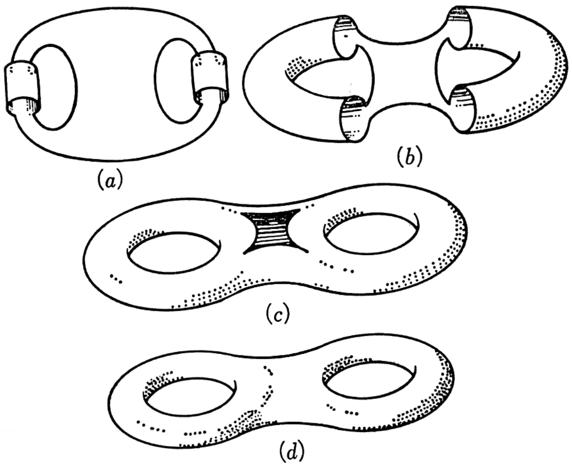


図 11.9

つづいて，図 11.9 にうつって，単純にひきのばす同相写像をほどこして，図 11.9(c) に到達する．最後に，はじめに取り除いた円板近傍をはりつけることにより，図 11.9(d) の 2 重トーラスがえられる．

すべての (連結な) コンパクト 2-多様体はある多角形の辺を同一視してえられる等化空間であることがわかる；この点については，この章で，後程，再びふれる．

11.2　問　　題

(a)　n-多様体の開集合は再び n-多様体であることを示せ．

(b) $CP^n = S^{2n+1}/\sim$ とする．但し，$\sim$は $S^{2n+1} \subseteq \boldsymbol{C}^{n+1}$ 上の次のように与えられる同値関係である．

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{ある } t \in I \text{ に対し，} x = (\exp(2\pi it))\cdot y.$$

$\boldsymbol{CP}^n$ が $2n$-多様体であることを証明せよ（$\sim$は S^{2n+1} 上の円周を1点に同一視していることに注意せよ．例えば，$\{(\exp(2\pi it), 0, \cdots, 0)\ ;\ t \in I\}$ は $\boldsymbol{CP}^n$ の1点を表わす）．

(c) p を正の整数とし，$L_p = S^{2n+1}/\sim$ とする．但し，$\sim$は $S^{2n+1} \subseteq \boldsymbol{C}^{n+1}$ 上の同値関係で次のように与えられる．

$$x \sim y \Leftrightarrow x = (\exp(2\pi in/p))\cdot y,\quad n = 0, 1, \cdots, p-1.$$

L_p が $(2n+1)$-多様体であることを証明せよ（$L_p = S^{2n+1}/\boldsymbol{Z}_p$，但し，$\boldsymbol{Z}_p$ はしかるべく S^{2n+1} に自由に作用している）．

(d) X を G-空間，但し，G は有限群で，X 上自由に作用する，とする．もし，X がコンパクト n-多様体ならば，X/G もそうなることを証明せよ．また，X/G が多様体ならば，X もそうなることを証明せよ．

(e) もし，M が n-多様体であれば，M の各点は閉 n-円板 D^n と同相な近傍をもつことを証明せよ．

(f) M がコンパクト n-多様体であるとする．M はあるユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分空間に同相になることを証明せよ（ヒント：M はコンパクトだから，M の有限被覆 $\{D_1, D_2, \cdots, D_m\}$ 及び同相写像 $h_i : D_i \to \mathring{D}^n$ が存在する．問題 8.14(j) と (k) を使用して，同相写像 $M/M-D_i \cong (D_i)^\infty \cong (\mathring{D}^n)^\infty \cong S^n$ をつくる．M はコンパクト，ハウスドルフであり，$M-D_i$ は閉集合だから，射影 $M \to M/M-D_i$ は連続で，連続写像 $f_i : M \to S^n$ がえられる．$f : M \to (S^n)^m (= \underbrace{S^n \times \cdots \times S^n}_{m})$ を

$$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_m(x))$$

と定義せよ．最後に，$(S^n)^m \subseteq (\boldsymbol{R}^{n+1})^m = \boldsymbol{R}^{(n+1)\cdot m}$ である．

(g) M を n-多様体とし，D を $\mathring{D}^n$ に同相な M の部分空間とする．$\mathring{D}^n \cong \boldsymbol{R}^n \cong S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ であるから，同相写像

$$g : D \to S^n - \{(0, \cdots, 0, 1)\}$$

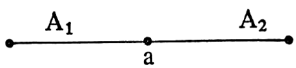
がえられる．$f : M \to S^n$ を次のように定義する．

$$f(x)=\begin{cases}g(x) & (x\in D)\\(0,\cdots,0,1) & (x\in M-D)',\end{cases}$$

f が連続であることを示せ．このことを使用して(f)の別証を与えよ．

われわれの興味の中心はコンパクト連結多様体にある．すべてのコンパクト連結 1–多様体は互いに同相である．円周 S^1 は 1 つのコンパクト連結 1–多様体である．実際，同相のもとでは，S^1 は唯一のコンパクト連結 1–多様体である．このことの証明はそれほど難しくなく，その概容を与えよう．その第一段階は，(おそらく一番手間のかかる部分であるが，直観的にはもっともらしいことである)コンパクト性を使用して，もし，M がコンパクト連結 1–多様体であれば，M が有限個の単位区間 I と同相な部分に，“うまい具合” に分割できることを示すことである．I の同相写像による像を弧，$\{0,1\}$ の像をその弧の頂点と呼ぶことにすれば，“うまい具合” という意味は，弧は自分自身と交わらず，弧同志が交わるとすれば，必ず 1 個または 2 個のそれらの頂点で交わっているということである(その 1 つのやり方は，(i) M を $\mathring{D}^1\cong\mathring{I}$ に同相な各点の近傍で被覆し，(ii) コンパクト性によりそれらの有限個を選び，(iii) M を依然被覆するように，I に同相なより小さな近傍達をとり出し，最後に，(iv) 1–多様体の定義を使用して M が “うまい具合” の分割をもつことを示す)．

そのような M の弧と頂点によるうまい具合の分割においては，明らかに，各頂点は丁度 2 つの弧の共通の頂点であり，各弧は 2 つの異なる頂点をもっている(もしも，1 つの頂点が 1 つまたは 3 つ以上の辺の頂点であると，その頂点は $\mathring{D}^1$ と同相な近傍をもちえない)．M が 2 個以上の弧をもつとする．A_1, A_2 を M の弧の対で，頂点 a で交わるとする．



A_1, A_2 を弧とみなす同相写像を $h_1 : A_1\to I$, $h_2 : A_2\to I$ とする．$h_1(a)=1$, $h_2(a)=0$ としてよいだろう；さもなければ，h_1 及び，h_2 に同相写像 $f : I\to I$, $f(t)=1-t$, を合成すればよい．$g : A_1\cup A_2\to I$ を次のように与える．

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}h_1(x) & (x\in A_1),\\[2mm] \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}h_2(x) & (x\in A_2)\end{cases}$$

これは完全に定義されていて，全単射であることが容易にわかる．g が連続であるのをみるには，まず A_1 と A_2 は $A_1 \cup A_2$，したがって M の閉集合であるのに注意する．C を I の閉集合とすれば，

$$g^{-1}(C) = h_1^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right] \cap C\right) \cup h_2^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap C\right)$$

であり，$g^{-1}(C)$ は明らかに $A_1 \cup A_2$ の閉集合となる．したがって，g は連続である．g が同相写像であることも容易に示せる．それゆえ，弧 A_1, A_2 を 1 つの弧 A によってとりなおすことができる．いまでは，M の分割で，弧の数，頂点の数が 1 つずつ少ないものがえられた．これをくりかえせば，2 つの弧，したがって 2 つの頂点からなる M の分割になって終了する．こうして，M は I の 2 つのコピーでそれらの両端の対応する点をはり合わせたものに同相になる．この結果は，M が S^1 に同相であることを示している．

コンパクト連結 2–多様体は**曲面**と呼ばれる．曲面の例は，球面 S^2，トーラス (輪環面) $T = S^1 \times S^1$，実射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$，そしてこの章のはじめに述べた 2 重トーラスである．最初の 3 つの例は，いかなる曲面も，これらの 3 つの曲面から "連結和" と呼ばれる方法でえられるという意味で基本的なものである．2 つの互いに交わらない曲面 S_1, S_2 に対し，**連結和** $S_1 \# S_2$ は，各曲面から小さな開円板をとり除き，その結果できた穴のふちを互いにはり合わせてえられる (図 11.10 をみよ)．

もっと正確に定義しよう．まず，$D_1 \subseteq S_1$，$D_2 \subseteq S_2$ を D_1, D_2 が D^2 に同相になるようにとる．そのような部分 D_1, D_2 が存在するのは容易にわかる：曲面の 1 点 x をとれば，x には近傍 N および同相写像 $h : N \to \mathring{D}^2$ が存在する．部分空間 $h^{-1}(D_{1/2}{}^2) \subseteq N$，但し $D_{1/2}{}^2$ は半径 1/2 の閉円板である，は同相写像

$$h^{-1}(D_{1/2}{}^2) \to D^2, \quad y \mapsto 2 \cdot h(y)$$

によって，D^2 に同相になる．

$S_1 \# S_2$ の定義にもどり，$D_1 \subseteq S_1$，$D_2 \subseteq S_2$ を D^2 に同相な部分空間とする．$h_1 : D_1 \to D^2$，$h_2 : D_2 \to D^2$ を同相写像とする．$S_1 \# S_2$ を

$$(S_1 - \mathring{D}_1) \cup (S_2 - \mathring{D}_2)/\sim$$

と定義する．ここで，$\sim$ は $\partial(S_1 - \mathring{D}_1) \cup \partial(S_2 - \mathring{D}_2)$ 上でのみ非自明な同値関係で，そこでは $x \sim h_2^{-1}h_1(x)$ $(x \in \partial D_1)$ で与えられる．

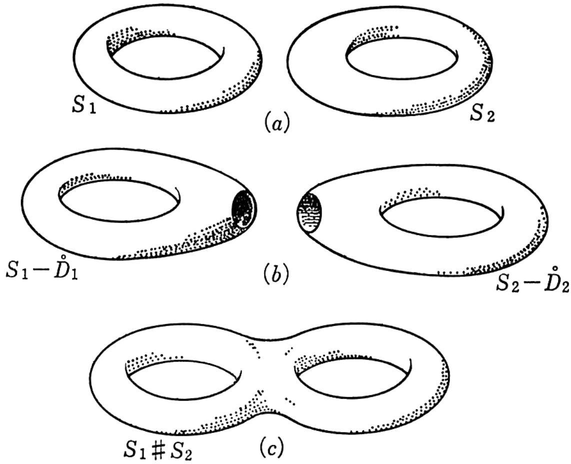


図 11.10

連結和の定義が，円板 D_1, D_2 及び同相写像 h_1, h_2 のいろいろなとり方によらないことを示すことができる．$S_1 \# S_2$ が曲面であることは容易にわかる；注目しなくてはならない点の近傍は，∂D_1 あるいは ∂D_2 のところのものだけである．詳細は読者に委ねる．

2重トーラスは，2つのトーラスの連結和である；図 11.10 をみよ．クラインの壺 K は2つの射影平面の連結和である．このことは第5章から極めて容易にわかるが，幾何的な証明を図 11.11 で示してある．図 11.11(*a*)のような2つの射影平面から出発する；そして，(*b*)のように2つの開円板をとり除く．その結果は(*c*)に同相となる．それらをはり合わせ(i.e., 連結和をとり)，(*d*)がえられる．最後に，(*e*)におけるように切りひらき，等化空間(*f*)をうる；組みかえて(*g*)，同一視して(*h*)，そして簡単な同相により(*i*)がえられるが，これはクラインの壺をあらわしている．

“すべての曲面が，球面 S^2，トーラス $T=S^1\times S^1$ および実射影平面 $\boldsymbol{R}P^2$ から，連結和によってえられる”という事実は，いわゆる曲面の分類定理を与えている．

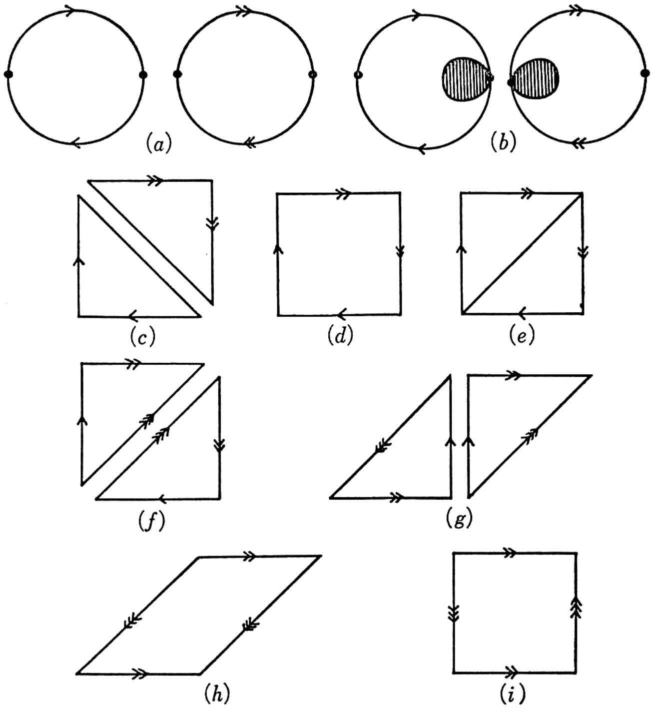


図 11.11

11.3 定　　理

S を曲面とする．S は次の曲面のいずれか 1 つにのみ同相になる．

$$S^2 \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{m} \qquad (m \geq 0),$$

$$S^2 \# \underbrace{\boldsymbol{R}P^2 \# \cdots \# \boldsymbol{R}P^2}_{n} \qquad (n \geq 1).$$

証明は 2 つの部分にわけられる．第一部は，どのような曲面も定理 11.3 に列挙されている曲面の少なくとも 1 つに同相になるということを示すことである．この部分の完全な詳細についてはふれないが，この章のあとの方で，むしろ簡単な概容を与える．証明の第二部は，定理に列挙された曲面のどの 2 つも互いに同相にならないことを示すことである；26 章で，このことを正確に証明する．

トーラスとの連結和をとることは，しばしばハンドル(把手)を貼りつけると

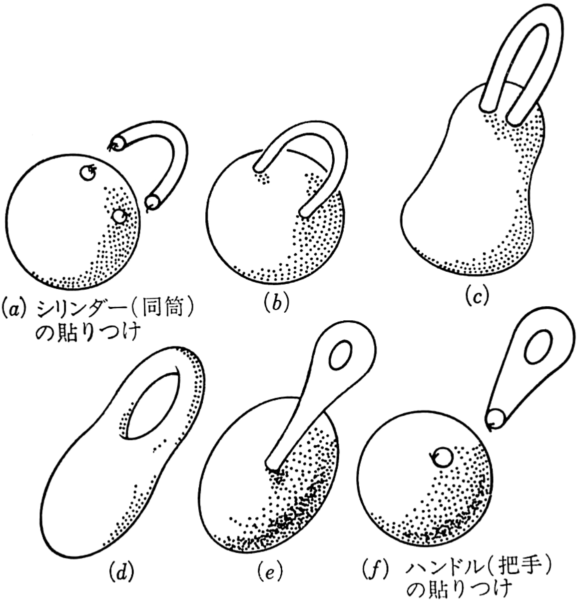


図 11.12

いわれる．ここで，ハンドルとは，トーラスから開円板をとり除いたものにすぎない；その理由は明らかだろう(例えば，図 11.12(*e*)，(*f*)をみよ)．円筒(シリンダー)を貼りつけるということもある；これをするには，曲面から2つの開円板をとり除き，図 11.12(*a*)のように円筒を貼りつければよい．この際，貼りつけを正しく行うことが重要である．正しくなく(つまり，境界円周の1つの矢印の向きを反対にして)円筒を貼りつければ，クラインの壺との連結和をとることになってしまう．

実射影平面との連結和をとることを，よく，メービウスの帯を貼りつけるともいう(図 11.13 をみよ)．というのは，射影平面から1つの開円板をとり除いたものは丁度メービウスの帯になっているからである(第5章をみよ)．

$\boldsymbol{RP}^2$ と連結和してえられる曲面は，(いわゆる)単面であることによって特別な性質をもっている．とい

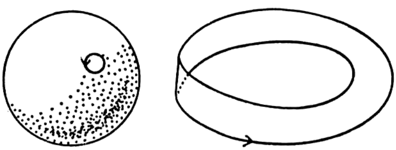


図 11.13

うのは，それが第5章でみたような奇妙な性質をもつメービウスの帯を含んでいるからである．曲面がその中にメービウスの帯を含まないとき，**向きづけ可能**な曲面という．他方，その中にメービウスの帯を含むとき，**向きづけ不能**であるという．

よって，クラインの壷や実射影平面は両方とも向きづけ不能であり，球面，トーラス，そして2重トーラスは向きづけ可能である．

$$S^2 \# \underbrace{T \# \cdots \# T}_{m} \qquad (m \geq 0),$$

と表わされる曲面を $S^2 \# mT$ と略記し，これを**種数 $\boldsymbol{m}$ の標準的な向きづけ可能曲面**という．

$$S^2 \# \underbrace{\boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2 \# \cdots \# \boldsymbol{R}P^2}_{n} \qquad (n \geq 1),$$

と表わされる曲面を $S^2 \# n\boldsymbol{R}P^2$ と略記し，これを**種数 $\boldsymbol{n}$ の標準的な向きづけ不能曲面**という．

いくつかのトーラスと射影平面の連結和をとれば，どのような曲面になるのか？　という疑問が当然わいてくる．いいかえれば，

$$\underbrace{T \# T \# \cdots \# T}_{m} \# \underbrace{\boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2 \# \cdots \# \boldsymbol{R}P^2}_{n} = mT \# n\boldsymbol{R}P^2$$

はどの標準的な曲面に同相になるのか？　但し，$m, n \geq 1$．そのような曲面は明らかに向きづけ不能であり，したがって定理11.3を仮定すれば，$mT \# n\boldsymbol{R}P^2$ は，ある k に対し $k\boldsymbol{R}P^2$ に同相となる．$m=n=1$ の場合に k の値を決定し，一般の場合は（容易な）練習問題とする．

11.4　補　　題

$$T \# \boldsymbol{R}P^2 \cong \boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2.$$

証明　$T \# \boldsymbol{R}P^2$ を S_1，$\boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2 \# \boldsymbol{R}P^2$ を S_2 とする．まず，S_1, S_2 を等化空間としてあらわす．S_1 は6角形 X の商空間となる（図11.14をみよ）．X のすべての頂点は S_1 の一点に同一視され，その点の S_1 における近傍 $\mathring{D}_1$ で $\mathring{D}^2$ に同相であるものが存在する（図11.14(e)をみよ）．この近傍をとり除き（図11.15(a)），同一視を行って図11.15(c)の空間がえられ，これは図11.15(d)に同相になる．11, 15(d)から11.15(o)へうつす同相写像の例を述べよう．(d)から

(g)へは，(e)と(f)に示されている影の部分を考えよう．図 11.8 に関連してすでに述べた方法で，(d)と(g)の間の同相写像を記述するのは難しくはない．(g)と(h)が同相であるのは容易にわかる．(h)と(k)が同相であるのをみるのに，(i)と(j)の影の部分を使用する．同様に，(k)と(n)が同相であるのをみるには，(l)と(m)の影の部分を使用すればよい．最後に，(n)と(o)が同相なのは容易にわかる．こうして，$S_1-\mathring{D}_1$は図 11.15(o)で表わされた空間と同相になる．

他方，S_2は図 11.16(c)で与えられる等化空間で表わせる．開円板と同相な((d)で示されている)近傍$\mathring{D}_2$を取り除き，必要な同一視をすると，図 11.16(g)の空間となる．同相写像

$$h : S_1-\mathring{D}_1 \cong S_2-\mathring{D}_2$$

が存在するのがすぐにわかる．さらに，明らかに，hは同相写像

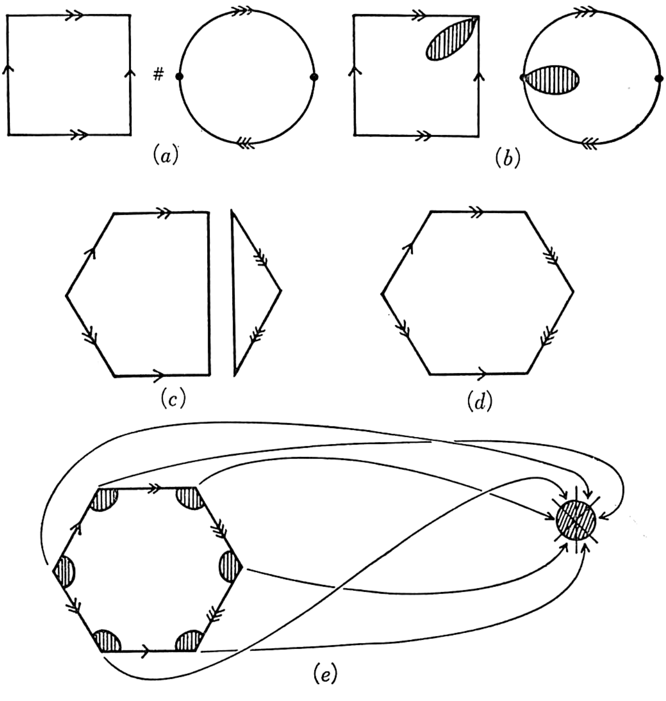


図 11.14

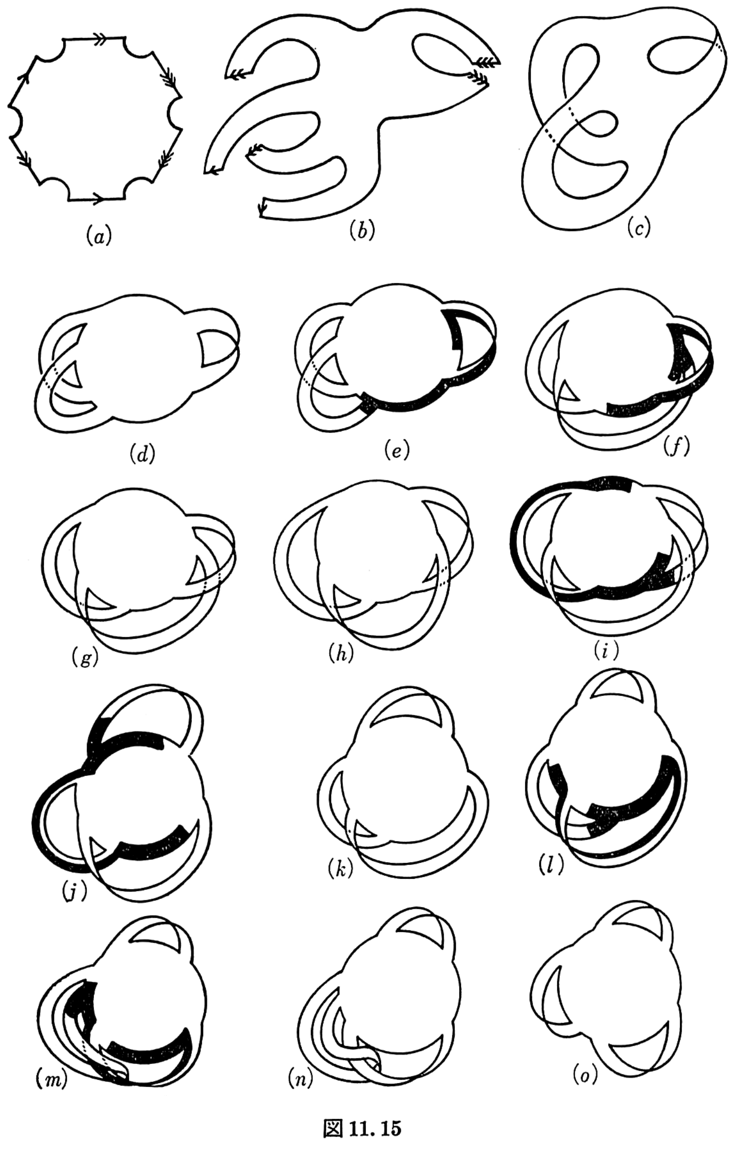


図 11.15

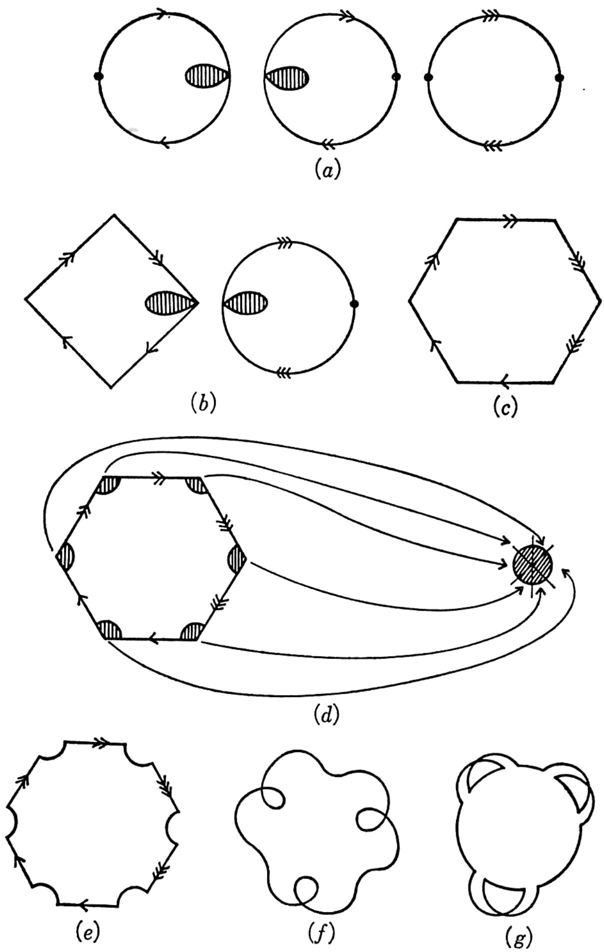


図 11.16

$$\partial(S_1-\mathring{D}_1)\cong\partial(S_2-\mathring{D}_2)$$

をひきおこしている．この D_1, D_2 の境界の間の同相写像は D_1 と D_2 の同相写像に拡張できる：もし，$h:\partial D_1\to\partial D_2$ が同相写像で，$h_1:D_1\cong D^2$, $h_2:D_2\cong D^2$ であれば，$x\in D^2$ を極座標で $x=(r,t)(0\leq r\leq 1,\ t\in\partial D^2=S^1)$ と書く．$H:D_1\to D_2$ を $H(y)=h_2^{-1}(r, h_2hh_1^{-1}(t))$，但し $h_1(y)=(r,t)\in D^2$ と定義する．$H|\partial D_1=h$ であり，H が同相写像であることは明らかである．こうして，

$$S_1=(S_1-\mathring{D}_1)\cup D_1\cong(S_2-\mathring{D}_2)\cup D_2=S_2$$

が成立し，これによって補題 11.4 の証明が終る. ▌

S_1 と S_2 の間の同相写像を視覚的にみる為のもう 1 つの方法がある. 連結和 $T\#\boldsymbol{R}P^2$ をハンドル(トーラスから開円板をとり 1 つ穴をあけたもの)とそれに貼りつけられるメービウスの帯で表わす. これは図 11.17(*a*)で示されるもので，それは明らかに図 11.17(*b*)の空間と同相である. (*c*)～(*f*)までの図で示された同相写像で動かしてやると最終的に図 11.17(*g*)となる.

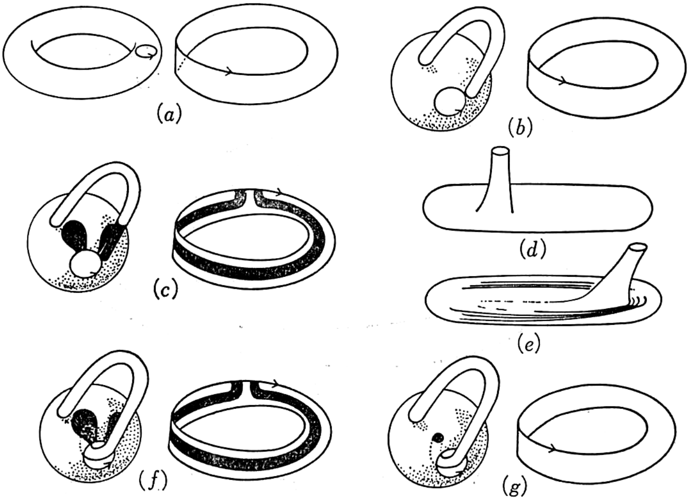


図 11.17

クラインの壺から円板を取り去ったものを考えると，図 11.18 はこの空間がどのようにみえるかを示している. したがって，今や容易に $S_1\cong K\#\boldsymbol{R}P^2$，但し，$K$ はクラインの壺，であることがわかる. ところが $K\cong\boldsymbol{R}P^2\#\boldsymbol{R}P^2$ であり，$S_1\cong S_2$ が示された.

11.5 練 習 問 題

(a) S_1, S_2 及び S_3 を曲面とする. 次を示せ.

$S_1\# S_2\cong S_2\# S_1$,

$(S_1\# S_2)\# S_3\cong S_1\#(S_2\# S_3)$,

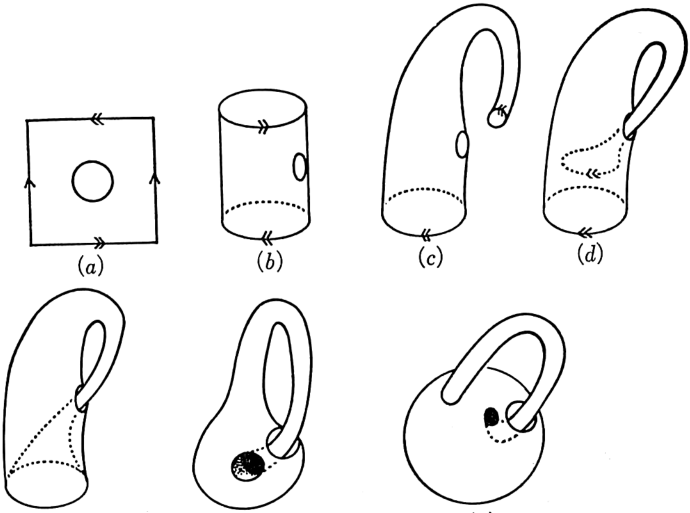


図 11.18

$S^2 \# S_1 \cong S_1$.

曲面の同相類は連結和に関し群をなすか？　どうしてならないか？

(b) M_1, M_2 を互いに交わらぬ連結な n-多様体とする．D_1 と D_2 を M_1, M_2 の部分集合で，それぞれ h_1, h_2 により D^n に同相であるとする．M_1 と M_2 の連結和 $M_1 \# M_2$ を商空間

$(M_1 - \mathring{D}_1) \cup (M_2 - \mathring{D}_2)/\sim$

但し～は $x \in \partial(M_1 - \mathring{D}_1)$ を $h_2^{-1}h_1(x)$ と同一視する，のことであると定義する．$M_1 \# M_2$ は n-多様体であることを示せ（訳者注，この定義では，$M_1 \# M_2$ が n-多様体とならぬことがある．D_1, D_2 を取り除く替りに，$h_1^{-1}(D^n{}_{1/2}) = D_1'$, $h_2^{-1}(D^n{}_{1/2}) = D_2'$ を取り除き，

$M_1 \# M_2$ を $(M_1 - \mathring{D}_1') \cup (M_2 - D_2')/\sim$

と定めると訂正する.）

(c) $S = nT \# m\boldsymbol{R}P^2$, $m, n \geq 1$, とする．S はどの標準曲面に同相か？

(d) S を曲面とする．S は次のうちの丁度 1 つの曲面に同相になることを示せ．

$S^2 \# nT$,　$\boldsymbol{R}P^2 \# nT$,　$K \# nT$

但し，K はクラインの壺であり，$n \geq 0$.

(e) 曲面 S が G–空間，但し $G=\boldsymbol{Z}_{2n+1}$，奇数次の巡回群，であるとする．S/G が曲面であることを証明せよ．G が S に自由に作用しているとは仮定していないことに注視せよ．

さて，曲面の分類定理の証明の第一段階の概容を述べることにしよう．空間の部分空間が**単純閉曲線**または**単一閉曲線**であるとは，それが円周 S^1 と同相であるときをいう．C が曲面 S の中の単一閉曲線であるとき，C が S を**分離する**とは，$S-C$ が連結でない，すなわち C で切りひらくと S は 2 つに分かれるときをいう（図 11.19 をみよ）．

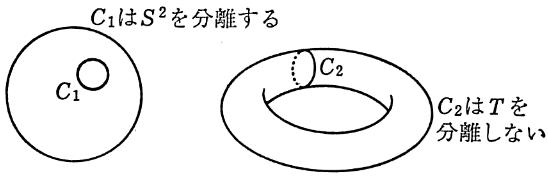


図 11.19

S を曲面とし，分離しない単一閉曲線 C を含むとする．C の近傍で，(i) 円筒または (ii) メービウスの帯（図 11.20）となるものがとれることが証明できる．直観的にはこのことは明らかである．

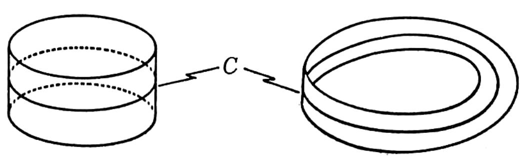


図 11.20

いま，この円筒またはメービウスの帯（の内部）を取り除く．円筒の場合 2 枚の円板を，後者の場合一枚の円板を，できた穴のところに貼りつける．こうして曲面 M_1 がえられる．明らかに，M は丁度 M_1 に円筒を（正しくまたは正しくなく），またはメービウスの帯を貼りつけたものである．言い換えれば，

$$M = M_1 \# T, \quad M = M_1 \# K \quad \text{または} \quad M = M_1 \# \boldsymbol{R}P^2$$

である．

次に，M_1 をみて，もしも M_1 内に M_1 を分離しない単一閉曲線がみつかれ

ば，全く同じ方法で，$M_1=M_2\#T$, $M_1=M_2\#K$ または $M_1=M_2\#\boldsymbol{R}P^2$ となる曲面 M_2 がえられる．これを i 回つづければ，M_i がえられて，

$$M = M_i \# i_1T \# i_2K \# i_3\boldsymbol{R}P^2,\ \text{但し，}\ i_1+i_2+i_3 = i,$$

となる．この操作は有限回，例えば k 回で終了する．つまり M_k 内の単一閉曲線は M_k を分離する．最後に，M_k が曲面で M_k 内のいかなる単一閉曲線も M_k を分離するならば，M_k は S^2 に同相であるという定理を使用する．いくつか証明されていない主張を仮定したが，M が $S^2\#lT\#mK\#n\boldsymbol{R}P^2(l, m, n\geq 0, l+m+n=k)$ に同相になることがわかった．補題 11.4 のやさしい応用によって，$S^2\#lT\#mK\#n\boldsymbol{R}P^2$ が

$$S^2\#lT \qquad (m+n=0\ \text{のとき}),$$
$$S^2\#(2l+2m+n)\boldsymbol{R}P^2 \qquad (m+n>0\ \text{のとき})$$

に同相になることもわかる．

分類定理の証明を完結するためには，定理 11.3 で列挙された曲面のどの 2 つも同相にならないことを示さなくてはならない；第 26 章でこのことを示そう．

11.6 練 習 問 題

(a) トーラス T には 2 つの異なる（しかし，交わる）単一閉曲線 C_1, C_2 で，$T-C_1\cup C_2$ が連結となるものが存在することを示せ．

(b) トーラスには 3 つの異なる閉曲線 C_1, C_2, C_3 で，$T-C_1\cup C_2\cup C_3$ が連結であるようなものは存在しないことを示せ．

(c) (a)及び(b)を他の曲面に対し一般化せよ．

曲面は $\boldsymbol{R}^2$ 内の多角形の商空間として表わせる，という最初に述べた結果の証明でこの章を閉じることにする．

11.7 定　　理

もし，M が向きづけ可能な種数 $m\geq 1$ の曲面であれば，M は 4m 角形から，図 11.21 (a) で示されるような同一視を行ってえられる商空間である．もし，M が向きづけ不能な種数 $n\geq 1$ の曲面であれば，M は $2n$ 角形から図 11.21 (b) で示されるような同一視を行ってえられる商空間で

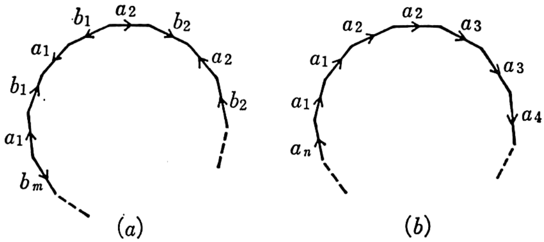


図 11.21

ある．

この結果を証明するには，mT および $n\boldsymbol{RP}^2$ が示されているような表示をもつことを示せばよい．ここでは，$m\leq 2$, $n\leq 3$ の場合についてだけ例証しておく．$T\#T$ は図 11.22 のような形になる．これをどのようにすすめて向きづけ可能な場合の結果がえられるかはおのずと明らかだろう．向きづけ不能な場合には，$\boldsymbol{RP}^2\#\boldsymbol{RP}^2$ に対し図 11.23 そして $\boldsymbol{RP}^2\#\boldsymbol{RP}^2\#\boldsymbol{RP}^2$ に対して図 11.24 がえられる．これからどう進めるかも再びおのずと明らかだろう．

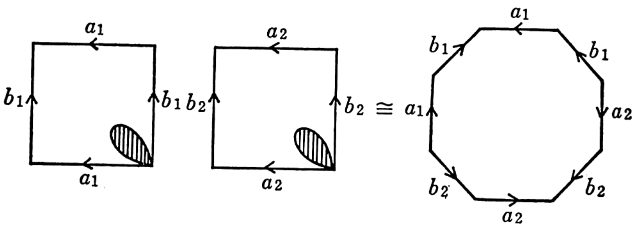


図 11.22

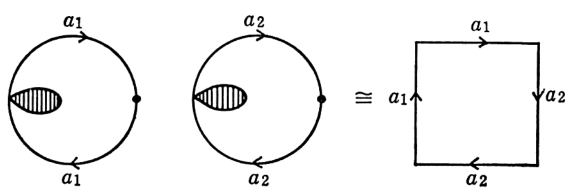


図 11.23

11.8 練 習 問 題

(a) 境界をもつ n–多様体 M とは，ハウスドルフ空間で，その各点が，$\boldsymbol{R}^n$

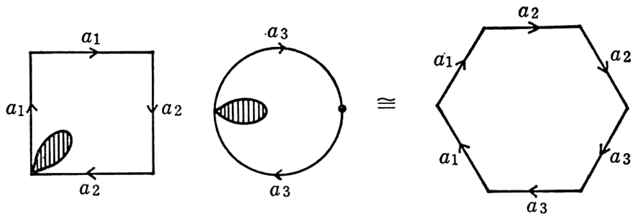


図 11.24

または $\boldsymbol{R}^n$ の閉上半空間，i.e., $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid x_n \geq 0\}$ と同相な近傍をもつときをいう．M の点で，閉上半空間に同相な近傍があるが，$\boldsymbol{R}^n$ に同相な近傍をもたないような点の全体を M の**境界**という．境界をもつ n-多様体の境界は $(n-1)$-多様体であることを証明せよ．

(b) 境界をもつ曲面とはコンパクト連結な境界をもつ 2-多様体のことである．境界をもつ曲面の境界は有限個の円周の互いに交わらない和集合であることを示せ．有限個の円板を貼りつけて，境界をもつ曲面から曲面がえられることを導け．

(c) 境界をもつ曲面が向きづけ可能とは，メービウスの帯を含まぬときをいう．境界をもつ曲面が向きづけ可能であるための必要十分条件は，上の(b)でえられた曲面が向きづけ可能となることであることを証明せよ．

12

道と道連結空間

第９章では連結性を学んだ；この章では幾分似てはいるが，しかし相異なる連結性の概念；道(または弧状)連結性について研究する．その定義の前に，“道”に注目する．連続写像 $f:[0,1]\to X$ を X の道という．点 $f(0)$ は始点，点 $f(1)$ は終点とよばれる．f は $f(0)$ と $f(1)$ を結ぶといい，f は $f(0)$ から $f(1)$ への道であるという(本によっては，道の代りに弧という言葉を使っている)．

道とは，写像 f のことであり，像 $f([0,1])$ のこと，これは曲線と呼ばれる，ではないことに注意して欲しい．

通常，$t\in[0,1]$ を時刻とみなし，$f(t)$ を時刻 t での位置とみなす．

最も簡単な道の例は，x を X の点としたとき，すべての $t\in[0,1]$ に対し，$\varepsilon_x(t)=x$ と定義される定値道 $\varepsilon_x:[0,1]\to X$ である．この道では，すべての時間中，１点 x にとどまっている．

１つの道から新しい道を作るための単純ではあるが重要な２つの方法がある．これらは次の補題で与えられる．１つは，f に対しその逆をたどる道 $\bar{f}$ を与える．もう１つは，２つの道 f と g を(もし可能なら)つなげて，新しいもう１つの道 $f*g$ を与える．

12.1　補　　題

(a)　もし，f が X の道であり，$\bar{f}$ が $\bar{f}(t)=f(1-t)$　$(t\in[0,1])$ と定義されているとすれば，$\bar{f}$ も X の道である．

(b)　もし，f と g が X の道で，f の終点と g の始点が一致していれば，次のように定義される写像 $f*g:[0,1]\to X$ も X の道である．

$$(f*g)(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1. \end{cases}$$

証明　(a)は自明であるが，(b)は次の結果，いわゆる“貼り合せ補題”から出る.

12.2　補　　題

W, X を位相空間とし，W の閉集合 A, B に対し，$W=A\cup B$ とする．もし，$f: A\to X$, $g: B\to X$ が連続写像で，すべての $w\in A\cap B$ に対し，$f(w)=g(w)$ であれば，

$$h(w)=\begin{cases} f(w) & (w\in A) \\ g(w) & (w\in B) \end{cases}$$

と定義された写像 $h: W\to X$ は連続写像である.

証明　h は完全に定義されている．C が X の閉集合であれば，そのとき，

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C)\cap(A\cup B)=(h^{-1}(C)\cap A)\cup(h^{-1}(C)\cap B) \\ &= f^{-1}(C)\cup g^{-1}(C) \end{aligned}$$

が成立する．f は連結だから $f^{-1}(C)$ は A で閉，A は W で閉であるからしたがって W で閉である．同様に，$g^{-1}(C)$ も W で閉である．よって，$h^{-1}(C)$ は W で閉であり，h は連続である.

12.3　定　　義

空間 X が道連結であるとは，X のいかなる 2 点 x_0, x_1 に対しても，x_0 から x_1 への X の道が存在するときをいう.

補題 12.1 により，$x_0\in X$ を固定しておいて，X のすべての点 x に対し，x_0 から x への道が存在することで十分であることに注意する(本によっては，道連結の代りに弧状連結という言葉をつかう).

例えば，通常の位相をもつ $\boldsymbol{R}^n$ は道連結である．理由は，任意の 2 点 $a, b\in\boldsymbol{R}^n$ に対し，$f(t)=tb+(1-t)a$ により定義された写像 $f:[0,1]\to\boldsymbol{R}^n$ は a から b への道になるからである．$\boldsymbol{R}^n$ の部分集合 E が凸であるとは，$a, b\in E$ であれば，集合 $\{tb+(1-t)a \mid 0\leq t\leq 1\}$ が E に含まれているときをいう．すなわち，E

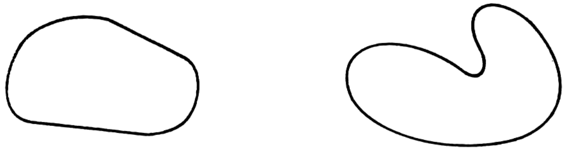


図 12.1

が凸であるとは，E のかってな 2 点を結ぶ線分が E に含まれているときをいう．凸である集合と凸でない集合の例としては図 12.1 をみよ．

とくに，$\boldsymbol{R}^1$ のいかなる区間も道連結である．次のいくつかの結果 12.4〜12.7 は結果 9.4〜9.7 の類似である．

12.4 定　理

連続写像による道連結空間の像は道連結である．

証明　X が道連結で，$g: X \to Y$ を連続全射とする．もし，a, b が Y の 2 点なら X の 2 点 a', b' で，$g(a')=a$，$g(b')=b$ となるものが存在する．X は道連結だから，a' から b' への X の道 f が存在する．しかし，このとき，gf は a から b への道で，これは Y が道連結であることを示している．

12.5 系

X と Y が同相な位相空間であれば，X が道連結であるための必要十分条件は Y が道連結となることである．

上の定理から，S^1 は道連結である．このことを使って，$\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$，$S^n$ および $\boldsymbol{R}P^n (n \geq 1)$ が道連結であることが示せる（$\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ については，$\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ のかってな 2 点は，原点を通らぬ円周上にあるからであり，S^n および $\boldsymbol{R}P^n$ については，それらが $\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ の連続写像による像であるからである）．

12.6 定　理

$\{Y_j | j \in J\}$ が X の道連結部分集合の集まりとする．もし，$\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ であれば，そのとき，$Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$ は道連結である．

証明　$a, b \in Y$ とし，$a \in Y_k$，$b \in Y_l (k, l \in J)$ であるとする．c を $\bigcap_{j \in J} Y_j$ のかってな点とする．Y_k は道連結で，$a, c \in Y$ であるから，a から c への道 f が存

在する．同様に，c から b への道 g が存在する．$h=f*g$，すなわち，

$$h(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

で与えられる道 h は a から b への道である．▌

上の結果は $\boldsymbol{R}^{n+1}-\{0\}$ (したがって，S^n および $\boldsymbol{R}P^n$)$(n\geq 1)$ が道連結であることのもう 1 つの示し方を与えている．

12.7　定　　理

X と Y を位相空間とする．そのとき，X と Y が道連結であるための必要十分条件は $X\times Y$ が道連結となることである．

証明は，定理 9.7 の証明と同じ (道連結を連結でおきなおすことを除けば) であり，読者に残しておく．

以上の結果から，読者は連結性と道連結性の間にいかなる違いもないのではないかと考えるような誤解をして欲しくない．次の結果が相違を示す．

12.8　定　　理

すべての道連結空間は連結である．連結な空間は道連結であるとは限らない．

証明　X が道連結空間であると仮定する．X が連結であることを示そう．空でない X の開集合 U, V により，$X=U\cup V$ と表わされたとする．X は道連結で，U, V は空でないから，道 $f:[0,1]\to X$ で，$f(0)\in U$, $f(1)\in V$ となるものが存在する．$[0,1]$ は連結で，$f([0,1])$ も連結であるから，$U\cap f([0,1])$ と $V\cap f([0,1])$ は必ず交わる．こうして，U と V は必ず交わり，X が連結であることが示された．

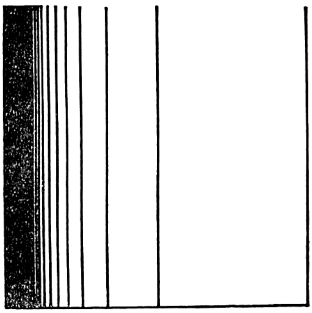


図 12.2

連結空間が必ずしも道連結ではないことを示すために，“蚤(のみ)と櫛(くし)”として知られている例を与えよう (図 12.2 をみよ)．$\boldsymbol{C}$ の部分空間

Xを考えよう．但し，$X=A\cup B$であり，

$$A = \{i\} \quad (\text{蚤}),$$

$$B = [0,1] \cup \left\{\frac{1}{n}+yi\,;\, n\in N,\ 0\leq y\leq 1\right\} \quad (\text{櫛}),$$

Xが連結であるが，道連結でないことを主張する．Xが連結であることを証明するには，まず，Bが道連結である(定理 12.6 を $B_n=[0,1]\cup\{1/n+yi\,;\,0\leq y\leq 1\}$ $(n\in \boldsymbol{N})$ に関し使用し，それから，$B=\bigcup_{n\in \boldsymbol{N}} B_n$ に関し使用する)，したがって，Bは連結であるということを観察しよう．UがXの開かつ閉集合とする．$A\subseteq U$としてよい(さもなくばUの補集合は開かつ閉でAを含んでいる)．Uは開集合で，$i\in U$であるから，$\varepsilon>0$が存在して，

$$\{x\,;\,|i-x|<\varepsilon\}\cap X\subseteq U$$

となる．ある整数nが存在して，$(1/n)+i\in U$となる；とくに，$U\cap B\neq\emptyset$である．しかし，Bは連結であり，$U\cap B$はBの空でない開かつ閉集合である；かくして，$U\cap B=B$，つまり，$B\subseteq U$である．ところが，$X=A\cup B$で，$A\subseteq U$である；こうして，$X=U$，したがって，Xが連結になる(本質的には，$B\subseteq X\subseteq \bar{B}$であることを証明した．このことから$X$が連結であることが練習問題 9.8(f)より出る)．

Xが道連結でないことを示すために，$i\in X$を始点とするXの道は定値道に限ることを示そう．fを$i\in X$を始点とするXの道とする．iはXで閉だから，$f^{-1}(i)$は$[0,1]$で閉であり，さらに，$0\in f^{-1}(i)$だから，$f^{-1}(i)\neq\emptyset$である．Uを次のように定められたXの開集合とする．

$$U = X\cap\left\{z\in \boldsymbol{C}\,;\,|z-i|<\frac{1}{2}\right\}.$$

もし，$t_0\in f^{-1}(i)$であれば，そのとき，fは連続だから$\varepsilon>0$が存在し，$|t-t_0|<\varepsilon$であれば，$f(t)\in U$となる．ここで，$f((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon))\cap[0,1])=i$を主張する．これをみるのに，$|t_1-t_0|<\varepsilon$かつ$f(t_1)\in B$とする．$U\cap B$は互いに交わらぬ区間の和であるから，$f(t_1)$を含む区間は$U$において開かつ閉である($U$が開であることから開であり，その区間はある$n\in \boldsymbol{N}$に対し$\{1/n+yi\,;\,0\leq y\leq 1\}\cap U$の形をしているから閉である)．しかし，このことは$f((t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap[0,1])$が連結であることに矛盾している．したがって，$(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)\cap[0,1]\subset f^{-1}(i)$である．

もし，$t_0 \in f^{-1}(i)$ なら，$(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\cap[0,1]\subseteq f^{-1}(i)$ となることを上で証明したのであったが，これは $f^{-1}(i)$ が開であることを意味する．$f^{-1}(i)$ は，また，閉であり，$[0,1]$ は連結だから，したがって $f^{-1}(i)=[0,1]$ となる．いいかえれば，$f([0,1])=i$ である．それゆえ，$i\in X$ といかなる $B\subseteq X$ の点とを結ぶ道は存在しない．こうして，我々が主張したように X は道連結にならない．▌

連結であるが道連結ではない他の類似の例がたくさんある；下の練習問題をみよ．この章で示す最後の結果は $\boldsymbol{R}^n$ の開連結集合に関している．

12.9　定　　理

$\boldsymbol{R}^n$ の空でない開かつ連結な集合 E は道連結である．

証明　$p\in E$ とし，F を p から E の道で結べるような E の点の全体のなす部分集合とする．F が開であると主張する．これを証明するのに，$q\in F\subseteq E$ をとる．E が開であるから，中心 q の開 n-円板 $D\subseteq E$ が存在する，すなわち，ある $\varepsilon>0$ に対し，$q\in D=\{x\,;\,\|q-x\|<\varepsilon\}$．開 n-円板は（$\boldsymbol{R}^n$ に同相だから）道連結であり，したがって，D のどんな点も q と D の道で結べる．よって，$q\in D\subseteq F$ となる．かくして，F は開である．

また，F が閉であると主張する．これをみるのに，$G=E-F$ を考える；G は p から E の道で結べない点のなす集合である．上と同様の議論により，G が開であり，したがって F が閉であることが示せる．部分集合 F は空でなく，開かつ閉である；E は連結だから，$F=E$ であり，E は道連結となる．

12.10 練 習 問 題

(a)　自明な位相をもついかなる空間も道連結であることを証明せよ．

(b)　次の $\boldsymbol{C}$ の部分集合のうち，どれが道連結か？

$\{z\,;\,|z|\neq 1\}$，$\{z\,;\,|z|\geq 1\}$，$\{z\,;\,z^2$ が実数$\}$．

(c)　補題 12.2 の結果を，A と B が共に W の開集合であると仮定して証明せよ．

(d)　$X=A\cup B$ を $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間とする．但し，

$A=\{(x,y)\,;\,x=0,\ -1\leq y\leq 1\}$,

$B=\{(x,y)\,;\,0<x\leq 1,\ y=\cos(\pi/x)\}$.

X は連結であるが道連結でないことを証明せよ.

(e) $X = A \cup B$ を $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間とする. 但し,

$$A = \{(x, y)\ ;\ x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\},$$

$$B = \left\{(x, y)\ ;\ 0 < x \leq 1,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\}.$$

X は連結であるが道連結でないことを証明せよ.

(f) $\boldsymbol{R}^2$ の次の部分集合を考えよう.

$$A = \left\{(x, y)\ ;\ 0 \leq x \leq 1,\ y = \frac{x}{n}(n \in \boldsymbol{N})\right\},$$

$$B = \left\{(x, y)\ ;\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1,\ y = 0\right\}.$$

$A \cup B$ は連結であるが, 道連結でないことを証明せよ.

(g) A は空間 X の道連結部分集合とし, $\{A_j\ ;\ j \in J\}$ は X の道連結部分集合の集まりで, その各集合 A_j は A と交わるとする. $A \cup (\bigcup_{j \in J} A_j)$ が道連結であることを証明せよ.

(h) $S^n = S_+{}^n \cup S_-{}^n$ とする. 但し,

$$S_+{}^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| = 1,\ x_{n+1} \geq 0\},$$

$$S_-{}^n = \{x \in \boldsymbol{R}^{n+1}\ ;\ \|x\| = 1,\ x_{n+1} \leq 0\}.$$

練習問題 8. 14(h) を使用して, $S^n (n > 0)$ が道連結であることを証明せよ.

(i) 空間 X の点の間の関係 $\sim$ を, $x \sim y \Leftrightarrow x$ と y を結ぶ X の道が存在する, と定義する. $\sim$ が同値関係であることを証明せよ. また, X が道連結であるための必要十分条件は商空間 $X/\sim$ が道連結であることを証明せよ.

(j) **点 $x \in X$ の開近傍**とは, x を含む X の開集合 U のことである. 空間 X が**局所道連結**であるとは, すべての点 $x \in X$ に対し, x のどんな開近傍も x の道連結な開近傍を含むときをいう. X が局所道連結で, $U \subseteq X$ が X で開であれば, そのとき, U も局所道連結であることを証明せよ. $\boldsymbol{R}^n$ は局所道連結である(したがって, $\boldsymbol{R}^n$ の開集合は局所道連結である)ことを証明せよ. もし, X が局所道連結で, かつ, 連結であれば, そのとき, X は道連結であることを証明せよ(したがって, これは定理 12. 9 を再証明する).

(k) $p, q \in X$ とする. X の部分集合 $A_1, \cdots, A_k$ が p と q を結ぶ単純鎖 (sim-

ple chain) であるとは，$p\in A_1$, $q\in A_k$, $|i-j|>1$ のとき，$A_i\cap A_j=\emptyset$ かつ $i=1, 2, \cdots, k-1$ に対し，$A_i\cap A_{i+1}\neq\emptyset$ のときをいう (図 12.3 をみよ).

もし，X が連結で，$\{U_j\,;\,j\in J\}$ が X の開被覆であれば，X のいかなる 2 点も $\{U_j\,;\,j\in J\}$ の元からなる単純鎖で結べることを証明せよ (ヒント：$p\in X$ に対し，$\{U_j\,;\,j\in J\}$ の元からなる単純鎖によって p から結べる X の点の集合を考えよ).

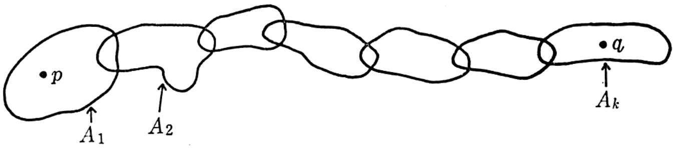


図 12.3

(l)　上の(k)を使用して定理 12.9 のもう 1 つの別証を与えよ.

(m)　連結 n-多様体は道連結であることを証明せよ.

(n)　n-多様体は局所道連結であることを証明せよ.

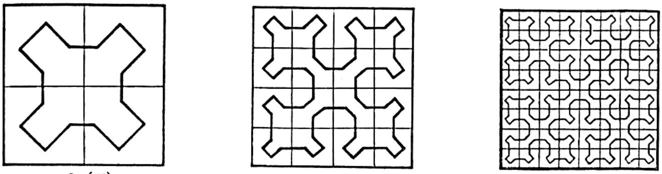
(o)　$Y=A\cup B\cup C$ 但し，

$$A=\{(x, y)\,;\,x^2+y^2=1,\ y\geq 0\},$$
$$B=\{(x, y)\,;\,-1\leq x\leq 0,\ y=0\},$$
$$C=\left\{(x, y)\,;\,0<x\leq 1,\ y=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{x}\right\},$$

によって与えられる空間 $Y\subseteq \boldsymbol{R}^2$ は道連結であるが，局所道連結でないことを証明せよ.

(p)　$Z=Y\cup D\subseteq \boldsymbol{R}^2$，但し，$Y$ は上の(o)におけるものとし，D は円周 $\{(x, y)\,;\,(x-1)^2+y^2=1\}$ である，とする．Z は道連結であるが，局所道連結でないことを証明せよ.

この章を終えるにあたって，奇妙な道について述べておく．これは，全射であるような道 $f: I\to I^2$ のことである．そのような例は，"空間を埋めつくす曲線" と呼ばれている．そのような例は，1890 年頃，G. ペアノによって最初に創られた．道 f は，道の列 $f_n: I\to I^2 (n\in\boldsymbol{N})$ の極限として定義される．はじめの 3 つ f_1, f_2, f_3 が図 12.4 で示されている．読者は n 番目の段階を困難なく視覚的に捉えるようにして欲しい．n 段階後，正方形 I^2 内のどんな点も，$f_n(I)$



$f_1(I)$　　$f_2(I)$　　$f_3(I)$

図 12.4

のある点から $(1/2)^n$ の距離以内に入っている．極限では，連続な全射 $f: I \to I^2$ がえられるのである．有限段階では，連続写像 $f_n: I \to I^2$ は，I の中の $\{0\}$ と $\{1\}$ でのみ単射でなくなっていることに注意しよう．実際，$\mathring{I}$ と $f_n(\mathring{I})$ は同相である．このことは，極限では絶対に成立していないのである．

12A

付録　ジョルダン曲線定理

12A.1　定　義

単一閉曲線 C とは，円周と同相な空間のことである．1 つの**成分**とは，最大の連結部分集合のことである．

次の 2 つの命題のうち，1 つは成立し，1 つは成立しない．

(A)　C をユークリッド平面の単一閉曲線とする．そのとき，$\boldsymbol{R}^2$-C は連結ではなく，C を共通の境界とした 2 つの成分からなる．これらの成分のうち，1 つは必ず有界である．

(B)　D をユークリッド平面の部分集合とする．もし，D が $\boldsymbol{R}^2$-D の各成分の境界で，$\boldsymbol{R}^2$-D が有界な成分をもてば，そのとき，D は単一閉曲線である．

さて，上の命題が共に成立しえないことを示すために 1 つの例を構成しよう．その例は，“和田の湖” として知られている．1917 年に，米山国蔵によって初めて描かれたものである．二重の円環域の形をした図形を考えよう (図 12A. 1 をみよ)．これを海水によって囲まれ，2 つの湖をもつ 1 つの島であると想像しよう．便宜上，2 つの湖の水は異なる色であるとする．海と 2 つの湖から島の中に運河を構成し，3 つの連結開集合を定義してゆこう．時刻 $t=0$ で，海から運河をつくり，海水を島の各点から 1 単位の距離以内にもってゆく．時刻 $t=1/2$ で，湖 1 から運河を掘り，その湖水を島の各点から 1/2 単位の距離以内へともってゆく．時刻 $t=3/4$ では，湖 2 から運河を掘り，その湖水を島の各点から 1/4 単位の距離以内にもってゆく．この操作は続けられ，時刻 $1-(1/2)^n$ で，しかるべき海水または湖水を島のどのような点からも，距離 $(1/2)^n$ 以内にある

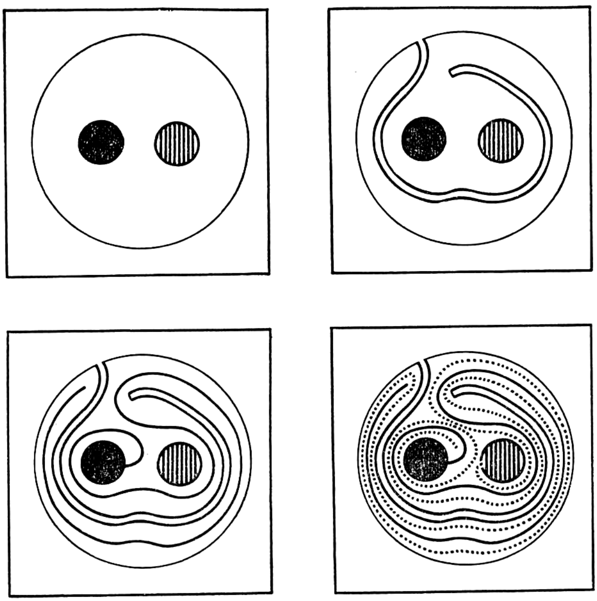


図 12A.1

ように運河を建設することができる．勿論，そうした運河は互いに交わらないとすべきである．2つの湖と海はそれぞれの運河系を含めて，3つの開集合をなし，それぞれは連結で，残った“乾いた島” D を共通の境界としている．

いまもし(B)が成立すれば，“和田の湖”において，図形 D は単一閉曲線である．そして，したがって，(A)は成立しない．他方，もし，(A)が成立すれば，そのとき，(B)は成立しえない(訳者注，D は単一閉曲線でない)．これが，命題(A)，(B)の少なくとも1つが成立しないという最初の我々の主張を証明している．

事実，(A)は成立するが(B)は成立しない．結果(A)はジョルダン曲線定理と呼ばれている．J. ジョルダンの名に由来してそう命名されている．彼は，1890年代初頭に，命題(A)は直観的には明白であるが厳密な証明が必要であると指摘したのであった．そのような証明が1900年代初頭にO. ヴェブレンによって与えられた．ここで与える証明は，Helge Tverberg(エルゲ・ツヴェルバーグ)により最近みつけられた初等的証明に基づくもので，彼に負うもので

ある．

簡単のため，平面内の単一閉曲線をジョルダン曲線という．したがって，ジョルダン曲線 C とは $S^1=\{z\in\boldsymbol{C}\,;\,|z|=1\}$ に同相な $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間のことである．ジョルダン曲線 C が $f:S^1\to C$ により与えられるとは，$C=f(S')$ のときをいう；勿論 f は一意的に定まるものではない．ジョルダン曲線がジョルダン多辺形であるとは，有限個の線分でできているときをいう．円周 S^1 は複素数平面上の部分集合であると考えることにする．$\boldsymbol{R}^2$ を複素数平面とみなすと都合がよい．したがって，$\boldsymbol{R}^2$ または S^1 の 2 点 x, y の間の距離は $|x-y|$ と表わされる．A と B を互に交わらないコンパクト集合とするとき，$d(A, B)$ を

$$d(A, B) = \inf\{|a-b|\,;\,a\in A,\ b\in B\}$$

によって定義する．とくに，A が 1 点からなるとき，例えば $A=\{x\}$ とすると，

$$d(x, B) = \inf\{|x-b|\,;\,b\in B\}$$

となる．

まず，ジョルダン曲線定理がジョルダン多辺形に対し成立するのを示そう．

12A.2　定　理

ジョルダン多辺形に対し，ジョルダン曲線定理が成立する．つまり，もし，C がジョルダン多辺形であれば，$\boldsymbol{R}^2$-C は C を共通境界とする 2 つの成分からなり，かつ，そのうちの丁度 1 つの成分は有界である．

証明　まず，C がジョルダン多辺形であれば，$\boldsymbol{R}^2$-C が少なくとも 2 つの成分をもつことを示そう．$p\in\boldsymbol{R}^2$-C とし，p から出るかってな半直線 r を考える；そのような線を p での放射線と呼ぶ．$P(r, p)$ で，r と C の交点の個数を表わす．但し，r が C の頂点 V または辺 L を通過しているときは，その交点の個数は，もし，V または L に隣接する 2 辺がそれぞれ V または L からみて同じ側にあるときには 2 と数え，そうでないときには 1 と数えるものとする．例えば，図 12A.2 においては，

$$P(r_1, p) = 1,\quad P(r_2, p) = 1,\quad P(r_3, p) = 1,\quad P(r_4, p) = 5,$$
$$P(r_5, p) = 3,\quad P(r_6, p) = 3$$

となる．

p での放射線を回転してゆけば，$P(r, p)$ の値は一般には変るが，しかし，そ

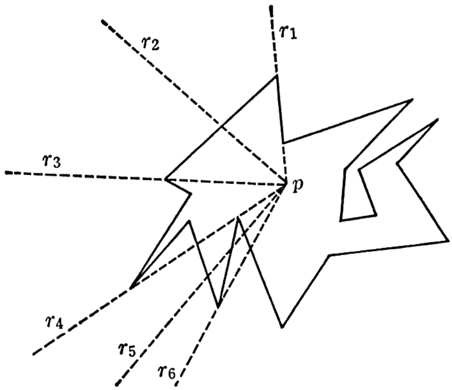


図 12A.2

れが偶数であるか奇数であるかは変らないのである．それ故，p が偶点または奇点であるということを，p でのかってな放射線 r に対し，それぞれ $P(r,p)$ が偶数であるか奇数であるかによって定義する．また，p の偶奇は，偶である，あるいは奇であるという言い方もする．

こうして，$\boldsymbol{R}^2$-C は偶点と奇点の集合，それぞれ，X_e と X_0 に分けられる．明らかに，$\boldsymbol{R}^2$-$C=X_e\cup X_0$ かつ $X_e\cap X_0=\emptyset$ である．X_e と X_0 が共に $\boldsymbol{R}^2$-C の開集合であることを示そう．$p\in\boldsymbol{R}^2$-C とし，$d(p,C)=\varepsilon$ とする．つまり，$B_\varepsilon(p)\subseteq\boldsymbol{R}^2$-$C$ となっている．$B_\varepsilon(p)$ のすべての点の偶奇は p の偶奇と同じである；$x\in B_\varepsilon(p)$ に対し，x を通る p での放射線を考えればよい．こうして，X_e と X_0 が開であり，$\boldsymbol{R}^2$-C は少なくとも 2 つの成分からなり，非連結である(訳者注．$X_e\neq\emptyset$ かつ $X_0\neq\emptyset$ をみなくてはならないが．このことは殆ど明らかだろう)．

X_e と X_0 は共に道連結である．これをみるには，C の一辺をかってにえらび，$\boldsymbol{R}^2$-C の 2 点 a,b を C に充分近く，しかし，互いにその辺の反対側にあるようにとり，$a\in X_e$ かつ $b\in X_0$ となるようにする．いまもし，p が $\boldsymbol{R}^2$-C のかってな点であれば，p から C に近い点への $\boldsymbol{R}^2$-C の道が存在するのは明らかである．この道を $\boldsymbol{R}^2$-C の中で，C に近いまま延長してゆけば，a または b に到達する．このことは，X_e と X_0 が道連結であること，したがって，連結であることを示している．これで証明は完結する．▌

証明を続けるために，“一様連続性”という概念と，$f:S^1\to\boldsymbol{R}^2$ が連続写像であれば，f が一様連続である，という事実を必要とする．

12A.3　定　　義

M_1, M_2 をそれぞれ距離 d_1, d_2 をもつ距離空間とする．写像 $f:M_1\to M_2$

が一様連続であるとは，与えられた $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在して，$d_1(x,y)<\delta$ をみたす M_1 のすべての点 x, y に対し，$d_2(f(x),f(y))<\varepsilon$ となるときをいう．

この概念は普通の連続性よりも強いことに注意する．

12A.4　定　　理

M_1, M_2 をそれぞれ距離 d_1, d_2 をもつ距離空間とする．もし，$f: M_1\to M_2$ が連続写像であり，M_1 がコンパクトであれば，そのとき，f は一様連続である．

証明　$\varepsilon>0$ とする．すべての点 $x\in M_1$ に対し，$\delta(x)>0$ が存在し，$d_1(x,y)<2\delta(x)$ なる全ての点 $y\in M_1$ に対し $d_2(f(x),f(y))<(1/2)\varepsilon$ となる．$\{B_{\delta(x)}(x);x\in M_1\}$ は M_1 の開被覆である．M_1 はコンパクトだから，有限部分被覆：

$$\{B_{\delta(x_1)}(x_1),\ B_{\delta(x)},\cdots,B_{\delta(x_2)}(x_n)\}$$

が存在する．$\delta=\min\{\delta(x_1),\ \delta(x_2),\cdots,\delta(x_n)\}$ とする．

もし，$x, y\in M_1$ かつ $d_1(x,\ y)<\delta$ であれば，そのとき，ある $i(1\leq i\leq n)$ に対し，$x\in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ となり，$\delta\leq\delta(x_i)$ であるから，

$$d_2(f(x),f(x_i))<\frac{1}{2}\varepsilon$$

となる．また，

$$d_1(y,x_i)\leq d_1(y,x)+d_1(x,x_1)<\delta+\delta(x_i)\leq 2\delta(x_i)$$

であるから，

$$d_2(f(y),f(x_i))<\frac{1}{2}\varepsilon$$

となる．したがって，

$$d_2(f(x),f(y))\leq d_2(f(x),f(x_i))+d_2(f(x_i),f(y))<\varepsilon$$

が成立し，f は一様連続である．

12A.5　系

もし，$f: S^1\to \boldsymbol{R}^2$ が連続写像なら，f は一様連続である．

証明は明白であろう．

12A.6 系

M_1, M_2 をそれぞれ距離 d_1, d_2 をもつ距離空間とする．もし，$f: M_1 \to M_2$ が連続で，M_1 がコンパクトかつ $f: M_1 \to f(M_1)$ が同相写像であれば，そのとき，与えられた $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ が存在し，$d_2(f(x), f(y)) < \delta$ であれば，$d_1(x, y) < \varepsilon$ となる．

証明 $f^{-1}: f(M_1) \to M_2$ は距離空間の間の連続写像で，$f(M_1)$ がコンパクトであることによる．▌

12A.7 定　理

C を $f: S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ によって与えられるジョルダン曲線とする．かってな $\varepsilon>0$ に対し，すべての $x \in S^1$ に対し，$|f(x)-f'(x)|<\varepsilon$ をみたす $f': S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ によって与えられるジョルダン多辺形 C' が存在する．

証明 f は S^1 上一様連続だから，$\varepsilon_1>0$ が存在し，

$$|x-y|<\varepsilon_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

となる．$f: S^1 \to C$ は同相写像であるから，系 12A.6 により，$\varepsilon_2>0$ が存在して，

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon_2 \Rightarrow |x-y| < \min(\varepsilon_1, \sqrt{3})$$

となる（$\sqrt{3}$ を考える理由は，もし，A が直径が $\sqrt{3}$ より小さい S^1 の部分集合であれば，A は 1 つの最小の閉弧に含まれることによる）．

$\delta=\min(1/2\varepsilon, \varepsilon_2)$ とする．C を正方形 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ でおおう．但し，$S_1, S_2, \cdots, S_n$ は辺上の点以外で重なり合わないように，各半径は δ となるようにとる．$\delta \leq \varepsilon_2$ であるから，$f^{-1}(S_1)$ は 1 つの最小の閉弧 $A_1 \neq S^1$ に含まれる．ここで，$f(A_1)$ をまっすぐにして，ジョルダン曲線 C_1 をつくる；いいかえれば，$f_1: S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$f_1(e(t)) = \begin{cases} f(e(t)) & (e(t) \in A_1 \text{ のとき}), \\ \left(1-\dfrac{t-a}{b-a}\right)f(e(a))+\dfrac{t-a}{b-a}f(e(b)) & (e(t) \in A_1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

但し，$A_1=\{e(t)\ ;\ a \leq t \leq b\}$ かつ $e(t)=\exp(2\pi it)$，と定義し，$C_1=f_1(S^1)$ とする．C_1 は明らかにジョルダン曲線である．$f(A_1)$ は必ずしも S_1 に含まれないことに注意する．また，$f_1^{-1}(S_i) \subseteq f^{-1}(S_i)$ が $i=2, \cdots, n$ に対し成立することに注

意する．次に，$f_1^{-1}(S_2)$ を含む最小の弧 A_2 に対し，$f_1(A_2)$ をまっすぐにする．これにより，$f_2: S^1 \to \boldsymbol{R}^2$ で与えられるジョルダン曲線 C_2 がえられる（$f_1^{-1}(S_2)=\emptyset$ であれば，$f_2=f_1$, $C_2=C_1$ とする）．再び，$i=3,4,\cdots,n$ に対し，$f_2^{-1}(S_i)\subseteq f^{-1}(S_i)$ が成立することに注意する．この方法をくりかえして，$f_n: S^1\to\boldsymbol{R}^2$ で与えられるジョルダン多辺形 C_n がえられる．C_n が C の ε-近似であることを検証しよう．

$x\in S^1$ とし，$f_n(x)\neq f(x)$ と仮定する．そのとき，ある $j\geq 1$ に対し，$f_n(x)=f_j(x)\neq f_{j-1}(x)$ となる．但し，$f_0=f$．構成の仕方から，x は弧 A_j に属し，A_j の両端点を y, z としよう．また，構成の仕方から，$f_j(z)=f(z)$, $f_j(y)=f(y)$ である．次が成立する．

$$\begin{aligned}|f(x)-f_n(x)| &= |f(x)-f(y)+f_j(y)-f_j(x)|\\ &\leq |f(x)-f(y)|+|f_j(y)-f_j(x)|\\ &\leq |f(x)-f(y)|+\delta\\ &\leq |f(x)-f(y)|+\frac{1}{2}\varepsilon.\end{aligned}$$

$|f(z)-f(y)|\leq\delta\leq\varepsilon_2$ であるから，$|z-y|\leq\varepsilon_1$ となる．ところが，$|x-y|<|z-y|$ で，$|x-y|<\varepsilon_1$ となり，したがって，$|f(x)-f(y)|<(1/2)\varepsilon$ である．こうして，

$$|f(x)-f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

が成立する．∎

12A.8　定　　理

C を $f: S^1\to\boldsymbol{R}^2$ で与えられるジョルダン多辺形とする．そのとき，$\boldsymbol{R}^2-C$ の有界な成分はその境界円周が $|a-b|\geq\sqrt{3}$ であるような C の2点 $f(a), f(b)$ で接している開円板を含む．

証明　D を $\boldsymbol{R}^2-C$ に含まれる開円板2点 $f(a), f(b)\in\partial D$ が存在し，しかも，$|a-b|$ が最大であるとする．そのような円板は存在する．$|a-b|<\sqrt{3}$ とする．そのとき，a と b は長さが $4\pi/3$ より大である弧 A の両端点となっている．D の境界円周 ∂D は $f(A)-\{f(a), f(b)\}$ と交わることはない．というのは，すべての $c\in A-\{a,b\}$ に対し，$\max\{|a-c|, |b-c|\}>|a-b|$ となっているからである．

$f(v_1), f(v_2), \cdots, f(v_n)$ を $f(A)$ における C の頂点で，$f(a)$ から $f(b)$ にこの順

に並んでいるとする．4つの可能な場合が生ずる．(i) $v_1 \neq a$, $b_n \neq b$,（ii) $v_1 \neq a$, $v_n = b$,（iii) $v_1 = a$, $v_n \neq b$，そして，(iv) $v_1 = a$, $v_n = b$. 最初の場合，円周 ∂D は線分 $f(a)f(v_1)$ と $f(b)f(v_n)$ に接している．D の近くに円板 $D' \subseteq \boldsymbol{R}^2 - C$ が存在し，円周 $\partial D'$ はそれぞれ $f(a)f(v_1)$ と $f(b)f(v_n)$ の上にある $f(a)$ と $f(b)$ に近い2点，これを $f(a'), f(b')$ としよう，で接している；図 12A. 3(*a*)をみよ．$|a'-b'| > |a-b|$ であるから，矛盾が生ずる．(ii)の場合には，円周 ∂D は $f(a)f(v_1)$ に接していて，円板 $D' \subseteq \boldsymbol{R}^2 - C$ で $\partial D'$ が $f(a)f(v_1)$ 上の $f(a)$ の近くの点で接し，$f(b)f(v_{n-1})$ の点を通過するものが存在する；図 12A. 3(*b*)をみよ．このことは矛盾をひきおこす．(iii)の場合は(ii)の場合と同様である．(iv)の場合には，$f(A)$ と $\bar{D}$ の中心と $f(a)$ と $f(b)$ を結ぶ2本の半径によって囲まれた領域 R を考える．各 $x \in R$ に対し，x 中心の $f(a)$ と $f(b)$ を通る円周 S_x が一意的に定まる．x を D の中心から連続的に動かしてゆくと，S_x が $\boldsymbol{R}^2 - C$ に含まれる円板を囲むような点 x がえられる．結局，ある点 x に対し，円周 S_x は $f(A)$ と $f(a), f(b)$ 以外の点で接するか，または，2つの線分 $f(a)f(v_2)$, $f(b)f(v_{n-1})$ のうちの1つに接している．前者の場合はすでにみたように生じないが，後者の場合には(ii)の場合のように矛盾が生ずる．これらすべての矛盾は，唯一つの可能性，すなわち $|a-b| \geq \sqrt{3}$ のみが生ずることを示している．▌

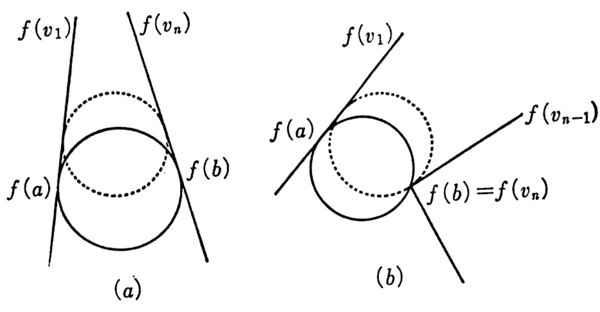


図 12A. 3

今や，ジョルダン曲線定理の一部を証明する段階となった．

12A. 9 定　　理

もし，C がジョルダン曲線なら，$\boldsymbol{R}^2 - C$ は少なくとも2つの成分をもつ．

証明 明らかに，有界でない成分が存在している．有界な成分が存在していることを証明しよう．$C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ を C に収束するジョルダン多辺形の列とする（ε_n が 0 に収束するとし定理 12A. 7 で ε を $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ として決めればよい）．$C, C_1, C_2, \cdots$ がそれぞれ $f, f_1, f_2, \cdots$ で与えられるとし，$n \to \infty$ のとき，$f_n \to f$ であるとする．各 C_n に対し，定理 12A. 8 により，$|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$ をみたす $f_n(a_n)$ と $f_n(b_n)$ を含む円周 S_n が存在する．S_n の中心を z_n とする．すべてのジョルダン曲線 C_n と C を囲む円周 S_0 が存在する．S_0 はすべての S_n を囲んでいる．したがって，点列 $z_1, z_2, \cdots$ は $\boldsymbol{R}^2$ の有界列で，収束部分列が存在する．それ故，$z_n, n \geq 1$ は $n \to \infty$ のとき収束すると仮定できる．

大きな n に対し，点 z と z_n が $\boldsymbol{R}^2$-C の同じ成分にあることを次のように示せる：$\delta > 0$ が存在し，$|x-y| \geq \sqrt{3}$ であれば，そのとき，$|f(x) - f(y)| \geq \delta$ となる．したがって，すべての $n \geq 1$ に対し，$|f(a_n) - f(b_n)| \geq \delta$ であり，よって，$\varepsilon_N < (1/2)\delta$ となるように十分大きな N をとると，$n \geq N$ に対し，$|f_n(a_n) - f_n(b_n)| > (1/2)\delta$ となる．つまり，$n \geq N$ に対し，S_n の直径は $(1/2)\delta$ より大であり，$d(z_n, C_n) > (1/4)\delta$ となる．ところが，十分大きな n に対し，$|z - z_n| < (1/4)\delta$ であり，z と z_n は $\boldsymbol{R}^n$-C_n の同じ成分にあることになる．定義により，z_n は $\boldsymbol{R}^2$-C_n の有界成分にあるから，z はその有界成分に含まれている．z が $\boldsymbol{R}^2$-C の非有界成分に属さないことを示そう．z が $\boldsymbol{R}^2$-C の非有界成分に属したとしよう．それ故，z から S_0 の外側のある点への $\boldsymbol{R}^2$-C の道 g が存在する（定理 12. 9 により，$\boldsymbol{R}^2$ の連結開集合は道連結である）．$d(g(I), C) = \delta$ とする．十分大きな n に対し，$|f_n(x) - f(x)| < (1/2)\delta$ であり，よって $d(g(I), C_n) > (1/2)\delta$ が成立する．つまり，大きな n に対し z は $\boldsymbol{R}^n$-C_n の非有界成分に属する．ところが，このことはすでに示した事実 "z が $\boldsymbol{R}^2$-C_n の有界成分に属する" に矛盾する．それゆえ，z は $\boldsymbol{R}^2$-C の有界成分に属することになり，$\boldsymbol{R}^2$-C は有界成分をもつことが証明された．

ジョルダン曲線定理の第 2 の部分を証明するのに次の定義を要する．

12A. 10 定 義

ジョルダン曲線 C の弦 Γ とは，その両端点でのみ C と交わる線分のことである．したがって，両端点を除けば，Γ は $\boldsymbol{R}^2$-C に含まれている．

もしも C がジョルダン多辺形で Γ が C の弦であれば，$\Gamma \subseteq X \cup C$，但し，$X$ は $\boldsymbol{R}^2$-C の成分の1つである，となり，さらに，X-Γ が2つの成分からなることに注意する．

12A.11 補　題

C をジョルダン多辺形とし，a, b を $\boldsymbol{R}^2$-C の同じ成分 X の2点で，$d(\{a, b\}, C) \geq \delta$ がある $\delta > 0$ に対しみたされるとする．Γ が 2δ より小なる長さの $X \cup C$ における C の弦であれば，必ず，a, b 両方が X-Γ の同じ成分にあると仮定する．そのような状況において，a から b への X の道 g が存在し，$d(g(I), C) \geq \delta$ となる．

証明　a 中心，半径 δ の開円板をとり，それを X の中にとどめるようにしながら b へとひっぱってゆくという考え方による．(直径 2δ の) その円板をひっぱってゆくのが出来なくなるのは，$X \cup C$ の中に 2δ より小さな長さの弦が存在するときである．弦に関する仮定はこのことが生じないことを保証している．

12A.12 定　理

C をジョルダン曲線とすれば，$\boldsymbol{R}^2$-C は高々2つの成分をもつ．

証明　$\boldsymbol{R}^2$-C が3つまたはそれ以上の成分をもつと仮定する．p, q, r を3つの異なる成分からとった点とする．$d(\{p, q, r\}, C) = \varepsilon$ とし，そして，$C_1, C_2, \cdots$ を C に収束するジョルダン多辺形の列とする．$C, C_1, C_2, \cdots$ はそれぞれ $f, f_1, f_2, \cdots$ によって与えられているとする．大なる n に対し，$d(C_n, C) < (1/2)\varepsilon$ であり，したがって，$d(\{p, q, r\}, C_n) < (1/2)\varepsilon$ となる．定理12A.2を使用して，十分大なる n に対し，3点 p, q, r のうち2点は $\boldsymbol{R}^2$-C_n の同一成分 X_n に属していることがわかる．必要なら，部分列をとることにより，p と q がすべての n に対し，X_n に属しているとしてよい．

ここで，$0 < \delta < \varepsilon$ なる δ と無限個の n に対し点 p, q が X_n の中の道 g_n で $d(g_n(I), C_n) \geq \delta$ をみたすもので結べると仮定する．大なる n に対し，$d(C_n, C) < (1/2)\delta$ であるから，大なる n に対し，$d(g_n(I), C) > (1/2)\delta$ となる．このことは，p と q が $\boldsymbol{R}^2$-C の同じ成分に属することを示している．この矛盾はそのような δ が存在しないことを示している．補題12A.11を使用することにより，無限個

の n に対し，長さ δ_n の弦 Γ_n で，p, q が X_n-Γ_n の異なる成分に含まれ，$n\to\infty$ のとき，$\delta_n\to 0$ となるようなものがとれる．これら無限個の n を小さい方から順に $n(1), n(2), \cdots$ と表わす．また，$\Gamma_{n(i)}$ の両端点を $f_{n(i)}(a_i), f_{n(i)}(b_i)$ とする．$\delta_{n(i)}\to 0 (i\to\infty)$ であるから，

$$f_{n(i)}(a_i)-f_{n(i)}(b_i)\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

となる．したがって，

$$f(a_i)-f(b_i)\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

であり，これから，

$$a_i-b_i\to 0 \qquad (i\to\infty)$$

がでる．

p と q は $X_{n(i)}-\Gamma_{n(i)}$ の異なる成分にあるから，無限個の i に対し，その1つの点，p とする，は $\Gamma_{n(i)}$ と $f_{n(i)}(A_i)$ によって囲まれた $X_{n(i)}-\Gamma_{n(i)}$ の成分に属する．但し，A_i は a_i, b_i を両端点とする S^1 上の小さい方の弧である．$a_i-b_i\to 0 (i\to\infty)$ であるから，その成分の直径は十分大なる i に対し，ε より小になる．とくに，$|p-f(a_i)|<\varepsilon$ となり，これは矛盾である．よって定理は証明された．∎

ジョルダン曲線定理は 12A. 9 から 12A. 12 の諸定理から示される．

12A. 13　練 習 問 題

(a)　単射連続写像 $f: I\to \boldsymbol{R}^2$ の像を A とすれば，$\boldsymbol{R}^2$-A は連結であることを証明せよ．

(b)　C を $f: S^1\to \boldsymbol{R}^2$ によって与えられるジョルダン曲線とする．

$$\delta = \min\{|f(x)-f(y)| \,;\, x, y\in S^1 \text{ かつ } |x-y|\geq\sqrt{3}\}$$

と定義する．$\boldsymbol{R}^2$-C の有界成分は直径 δ の開円板を含むことを証明せよ．

(c)　$\boldsymbol{R}^2$ の中には非可算個の単一閉曲線を互いに交わらぬようにおける；例えば，$\{C_r \,;\, r\in\boldsymbol{R}\}$，但し，$C_r=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2 \,;\, x^2+y^2=r^2\}$．

$$\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2 \,;\, (x\pm 1)^2+y^2 = 1\}$$

に同相な空間を8の字曲線という．

もし，$\{E_j \,;\, j\in J\}$ が互いに交わらぬ $\boldsymbol{R}^2$ の中の8の字曲線の集まりであれば，そのとき，J は可算であることを証明せよ．

13

連続写像のホモトピー

この章では，位相空間の間の連続写像に1つの同値関係を導入する．これは，後の章，とくに道に適用されるとき，基本的に重要になる．

大雑把に言えば，2つの連続写像 $f_0, f_1 : X \to Y$ がホモトープであるとは，t に関して連続に変化する連続写像 $f_t : X \to Y$ の中間族が区間 $0 \leq t \leq 1$ 上に存在するときをいう．図 13.1(a)をみよ．図 13.1(b)の2つの写像はホモトープでない；ここで，$X=S^1$ であり，Y は $\boldsymbol{R}^2$ の円環域である．

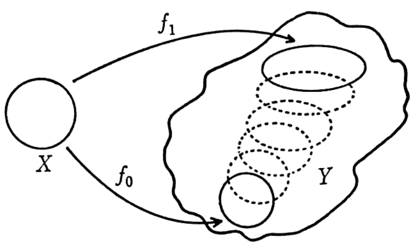
正確には次のように定義される．

13.1　定　　義

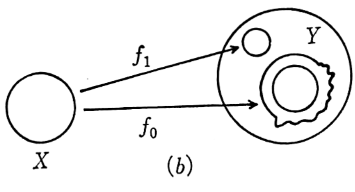
2つの連続写像 $f_0, f_1 : X \to Y$ がホモトープ (homotopic) であるとは，連続写像 $F : X \times I \to Y$ で，$F(x, 0) = f_0(x)$ かつ $F(x, 1) = f_1(x)$ をみたすものが存在するときをいう．

例えば図 13.2 をみよ．

写像 F を f_0 と f_1 の間のホモトピー (homotopy) という．$f_0 \simeq f_1$ または $F : f_0 \simeq f_1$ と書く．各 $t \in [0, 1]$ に対し，$F(x, t)$ を $f_t(x)$ と表わせば，$f_t : X \to Y$ は連続写像である．



(a)



(b)

図 13.1

$f:I\to Y$ を道とすれば，f は $F(x,t)=f((1-t)x)$ で定義されるホモトピー $F:I\times I\to Y$ によって定値道 $\varepsilon_{f(0)}$ にホモトープになる．このようになることを避けたいときには，より一般なホモトピーの概念——部分集合 A に相対的なホモトピー——を使用する．そこでは，ホモトピーは A のいかなる点も動かさないことが要求される．

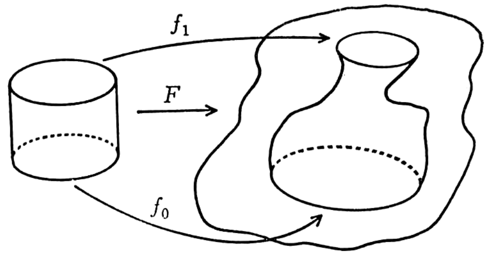


図 13.2

13.2 定　　義

A を X の部分集合とし，f_0 と f_1 を X から Y への 2 つの連続写像とする．f_0 と f_1 が A を動かさずにホモトープ(homotopic relative to A)であるとは，f_0 と f_1 の間のホモトピー $F:X\times I\to Y$ で，すべての $a\in A$ に対し，$F(a,t)$ が t に依存しない；いいかえれば，すべての $a\in A$ 及びすべての $t\in I$ に対して $F(a,t)=f_0(a)$，となるときをいう．

このとき，すべての $a\in A$ に対し，$f_0(a)=f_1(a)$ であることに注意する．このホモトピー F を A を動かさないホモトピー(homotopy relative to A)といい，$f_0\simeq f_1\ (\mathrm{rel}\ A)$ または $f_0\simeq_{\mathrm{rel}\ A}f_1$ と表わす．

例えば，$X=I$ かつ $A=\{0\}\in X$ とした図 13.3 をみよ．

もう 1 つの例として，$X=I, A=\{0,1\}$ かつ Y が $\boldsymbol{R}^2$ の円環であるとした図 13.4 を考えよう．このとき，f_0 と f_1 はホモトープであるが，A を動かさずにホモトープではない．

当然，$A=\emptyset$ のときは，A を動かさぬホモトピーは単なるホモトピーに他ならない．次の結果より，A を動かさないホモトピーは同値関係となる．

13.3 補　　題

X から Y への連続写像の全体の集合上で，$\simeq_{\mathrm{rel}\ A}$ は同値関係である．

証明　$F(x,t)=f(x)$ は f と f 自身の間の A を動かさないホモトピーになる

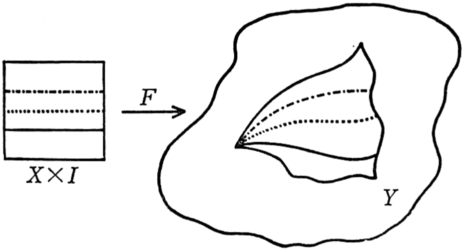


図 13. 3

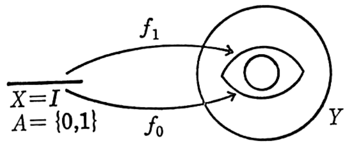


図 13. 4

ので，この関係は反射律をみたす．$F: f\simeq_{\mathrm{rel}\,A} g$ のとき，$G(x,t)=F(x,1-t)$ によって与えられる G によって，$G: g\simeq_{\mathrm{rel}\,A} f$ となるので，この関係は対称律をみたす．最後に，この関係が推移律をみたすことを示そう．$F: f\simeq_{\mathrm{rel}\,A} g$ および $G: g\simeq_{\mathrm{rel}\,A} h$ のとき，H を次のように定義すれば，$H: f\simeq_{\mathrm{rel}\,A} h$ となる：

$$H(x,t)=\begin{cases} F(x,2t), & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}, \\ G(x,2t-1), & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1. \end{cases}$$

貼り合わせ補題により，H が連続であることが示される．▌

13.4 練 習 問 題

(a) X を空間とし，$f: S^1\to X$ を連続写像とする．f が**零ホモトープ**(null-homotopic)(即ち，定値写像にホモトープ)であるための必要十分条件は連続写像 $g: D^2\to X$ で $g|S^1=f$ を満すものが存在することであることを示せ(ヒント：c を定値写像とし，$F: c\simeq f$ とするとき，$x\in S^1$，$r\in I$ に対して，$g(rx)=F(x,r)$ で g を定義して，練習問題 8.14(f) を適用せよ)．

(b) $x, y\in X$ とする．x から y への X の道の "$\{0,1\}$ を動かさないホモトピー" による同値関係の同値類の集合を $P(x,y)$ と表わす．(いいかえれば，x から y への 2 つの道 $p, q: I\to X$ が $P(x,y)$ で同値であるとは，$p\simeq q$ $(\mathrm{rel}\,\{0,1\})$ となることである)．$P(x,y)$ と $P(x,x)$ の間に一対一対応が存在するための必要十分条件は $P(x,y)\neq\emptyset$ となることであることを示せ．

(c) $0<s<1$ とする．p と q を $p(1)=q(0)$ となる道とする．h を次の式で定義する．

$$h(t)=\begin{cases} p\left(\dfrac{t}{s}\right) & 0\leq t\leq s, \\ q\dfrac{(t-s)}{(1-s)} & s\leq t\leq 1. \end{cases}$$

このとき，h と $p*q$ は $\{0,1\}$ を動かさずにホモトープであることを証明せよ．

(d) 道 f に対し，$\bar{f}$ を $\bar{f}(t)=f(1-t)$ で定義される道とする．このとき，$f\simeq g(\text{rel}\,\{0,1\})\Leftrightarrow\bar{f}\simeq\bar{g}(\text{rel}\,\{0,1\})$ を示せ．

(e) $f_0\simeq_{\text{rel}A}f_1: X\to Y$ であり，$g: Y\to Z$ が連続写像なら，このとき，$gf_0\simeq_{\text{rel}A}gf_1: X\to Z$ となることを示せ．

(f) $f_0\simeq f_1: X\to Y$ かつ $g_0\simeq g_1: Y\to Z$ とする．このとき，$g_0f_0\simeq g_1f_1: X\to Z$ を示せ(ヒント：まず(e)を使用し，$g_0f_0\simeq g_0f_1$ を示し，次に，$g_0f_1\simeq g_1f_1$ を示せ)．

(g) X, Y を位相空間とし，$\mathcal{F}(X,Y)$ を X から Y への連続写像全体の集合でコンパクト-開位相をもつものとする(練習問題7.13(d)参照)．$f\simeq g: X\to Y$ のとき，f から g への空間 $\mathcal{F}(X,Y)$ の中での道が存在することを証明せよ．X がコンパクトかつハウスドルフであるとき，f から g への $\mathcal{F}(X,Y)$ の道が存在するための必要十分条件は $f\simeq g: X\to Y$ であることを証明せよ(最後の結果は，X が局所コンパクトかつハウスドルフである場合にも成立する)．

ホモトープな写像という概念を使用して，位相空間に関する1つの同値関係が定義できる．

13.5 定　義

2つの位相空間 X と Y が**同じホモトピー型**(same homotopy type)をもつとは，連続写像 $f: X\to Y$ および $g: Y\to X$ で次をみたすものが存在するときをいう．

$$gf\simeq 1,$$
$$fg\simeq 1.$$

写像 f と g は，このとき，**ホモトピー同値**(homotopy equivalence)といわれる．また，X と Y は**ホモトピー同値である**(homotopy equivalent)

ともいう．

明らかに同相な2つの空間は同じホモトピー型を持つ．しかしながら逆は成立しない．例えば，$n>0$ のとき n-円板 $D^n \subseteq \boldsymbol{R}^n$ は一点 $\{y\} \subseteq D^n$ に同相ではないが，同じホモトピー型を持っている．$\{y\}$ と D^n がホモトピー同値であることを示すために $f(y)=y$ で定義される包含写像 $f:\{y\}\to D^n$ と定値写像 $g:D^n \to \{y\}$ を考える．$gf=1$ となるのは明らかである．他方，$F(x,t)=tx+(1-t)y$ によって定義される $F:D^n\times I\to D^n$ は fg と $1:D^n\to D^n$ の間のホモトピーになる．1点とホモトピー同値な空間は特別な名称が与えられている．

13.6 定　義

位相空間 X が1点とホモトピー同値であるとき，X は**可縮**(contractible)であるという．

したがって，D^n は可縮である．もっと一般的に，$\boldsymbol{R}^n$ の中の任意の凸部分集合は可縮である．直観的には，位相空間が可縮であるとは，その空間が自分自身の中で1点に縮んでゆけるときをいう(円周は自分自身の中で1点に縮むことはできない)．

もう1つのホモトピー同値な位相空間の例として円柱 C と円周 S^1 を挙げておこう．まずこれを示すために C と S^1 を次のように決めておく．

$$C=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3\ ;\ x^2+y^2=1,\ \ -1\leq z\leq 1\},$$

$$S^1=\{(x,y,z)\in \boldsymbol{R}^3\ ;\ x^2+y^2=1,\ \ z=0\}.$$

$i:S^1\to C$ を包含写像とし，$r:C\to S^1$ を $r(x,y,z)=(x,y,0)$ で定義する．$ri=1:S^1\to S^1$ は明らかであり，一方 $F((x,y,z),t)=(x,y,tz)$ で定義される $F:C\times I\to C$ は ir と $1:C\to C$ の間のホモトピーになる．

このような例から，いくつかの定義が考えられる．

13.7 定　義

位相空間 X の部分集合 A に対して，連続写像 $r:X\to A$ で $ri=1:A\to A$(または $r|_A=1$ としても同値である)をみたすものが存在するとき，A を X の**レトラクト**(retract)という．ここで，$i:A\to X$ は包含写像である．また写像 r は**レトラクション**(retraction)と呼ばれる．

13.8 定　　義

X の部分集合 A が X の**変形レトラクト** (deformation retract) であるとは，レトラクション $r: X \to A$ で $ir \simeq 1: X \to X$ をみたすものが存在するときをいう．ここで，$i: A \to X$ は包含写像である．

言い換えると，A が X の変形レトラクトであるとは，ホモトピー $F: X \times I \to X$ で，すべての $x \in X$ に対して $F(x,0)=x$, $F(x,1) \in A$ およびすべての $a \in A$ に対して $F(a,1)=a$ をみたすものが存在するときをいう．

したがって，円周は円柱の変形レトラクトである．また A が X の変形レトラクトのとき，A と X はホモトピー同値であることに注意する．上の円周と円柱の例では，実際には ir と恒等写像は円周を動かさないホモトピーになっている．これによりもう 1 つの定義が考えられる．

13.9 定　　義

X の部分集合 A が**強変形レトラクト** (strong deformation retract) であるとは，レトラクション $r: X \to A$ で $ir \simeq_{\mathrm{rel}A} 1: X \to X$ をみたすものが存在することをいう．

言い換えるなら，A が X の強変形レトラクトであるとは，ホモトピー $F: X \times I \to X$ ですべての $x \in X$ に対して $F(x,0)=x$，すべての $a \in A$ およびすべての $t \in I$ に対して $F(a,t)=a$，そしてすべての $x \in X$ に対して $F(x,1) \in A$ をみたすものが存在するときをいう．

明らかに，強変形レトラクトは変形レトラクトでもある．強変形レトラクトの概念は今後有用になる．警告：強変形レトラクトをただ単に変形レトラクトと呼んでいる書もあるが，ここではそういう使い方はしない．直観的に言えば，A が X の強変形レトラクトであるとは，X が自分自身の中で A を固定したまま A の中に縮んでいくことを意味する．

ここで強変形レトラクトのもう 1 つの例を与える．次の式で定義される $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $Y = C_1 \cup C_2$ を考える．

$$C_1 = \{x = (x_1, x_2)\ ;\ (x_1 - 1)^2 + x_2{}^2 = 1\},$$

$$C_2 = \{x = (x_1, x_2)\ ;\ (x_1 + 1)^2 + x_2{}^2 = 1\}.$$

したがって，Y は‘8の字’型である．すなわち，2つの円周を1点で結合したものである．$X=Y-\{(2,0),(-2,0)\}$ とおく．このとき1点の集合 $x_0=(0,0)$ は X の強変形レトラクトである．これを示すために，自明に定義される写像 $i:\{x_0\}\to X$ と $r:X\to\{x_0\}$ を考える．明らかに $ri=1$ である．また $ir\simeq 1(\mathrm{rel}\ \{x_0\})$ を示すために次の式で定義されるホモトピー $F:X\times I\to X$ を使う．

$x\in C_i$, $i=1,2$ に対して

$$F(x,s)=(1-s)x/\|((1-s)x_1+(-1)^i,(1-s)x_2)\|$$

F が連続であることは容易に確かめられる．$F(x_0,s)=x_0$, $F(x,0)=x$ および $F(x,1)=x_0$ であるから $ir\simeq 1(\mathrm{rel}\ \{x_0\})$ となり，それ故 $\{x_0\}$ は X の強変形レトラクトである．

13.10 演習問題

(a) メービウスの帯の中の円周でメービウスの帯の強変形レトラクトになっているものが存在することを示せ．またこのことから，メービウスの帯と円柱がホモトピー同値であることを示せ．

(b) X が可縮であるための必要十分条件は恒等写像 $1:X\to X$ が定値写像にホモトピックであるということを証明せよ．

(c) レトラクション $r:D^n\to S^{n-1}$ が存在するための必要十分条件は S^{n-1} が可縮であるということを証明せよ．(ヒント：$F:S^{n-1}\times I\to S^{n-1}$ を定値写像と恒等写像の間のホモトピーとするとき，$(x,t)\to tx$ によって与えられる自然な写像 $S^{n-1}\times I\to D^n$ と $F(S^{n-1}\times\{0\})$ が1点であるという事実を利用せよ．)

(d) X が連結であり Y と同じホモトピー型をもつとき，Y もまた連結であることを示せ．

(e) 部分集合 $A\subseteq X$ が X の弱レトラクト (week retract) であるとは，連続写像 $r:X\to A$ で $ri\simeq 1:A\to A$ をみたすものが存在するときをいう．ここで $i:A\to X$ は包含写像である．明らかにレトラクトは弱レトラクトである．弱レトラクトではあるが，レトラクトではない部分集合の例を挙げよ．

(f) 変形レトラクトではあるが強変形レトラクトではない部分集合の例を挙

げよ.

(g) 部分集合 $A \subseteq X$ が X の**弱変形レトラクト** (weak deformation retract) であるとは，包含写像 $i: A \to X$ がホモトピー同値のときをいう．したがって，変形レトラクトは弱変形レトラクトである．弱変形レトラクトではあるが，変形レトラクトではない部分集合の例を挙げよ.

(h) A を X の部分空間，また Y を空でない位相空間とする．$A \times Y$ が $X \times Y$ のレトラクトであるための必要十分条件は A が X のレトラクトであることを証明せよ.

(i) '…は…のレトラクトである' という関係は推移的であることを示せ(すなわち，A が B のレトラクトであり，B が C のレトラクトであるとき，A は C のレトラクトになる).

(j) 任意の点 $x_0 \in S^1$ に対して部分集合 $S^1 \times \{x_0\}$ は $S^1 \times S^1$ のレトラクトではあるが，強変形レトラクトではないことを示せ．また，変形レトラクトになるか？　弱変形レトラクトになるか？

(k) $x_0 \in \boldsymbol{R}^2$ とする．このとき $\boldsymbol{R}^2$ の中の円周で $\boldsymbol{R}^2 - \{x_0\}$ の強変形レトラクトであるものを見つけよ.

(l) T をトーラスとし，X を T の中の1点の補集合とする．X の部分集合で '8の字' 曲線に同相でありかつ X の強変形レトラクトであるものを見つけよ.

(m) S^n は $\boldsymbol{R}^{n+1} - \{0\}$ の強変形レトラクトであることを示せ.

(n) ハウスドルフ空間のレトラクトは閉部分集合になることを示せ.

(o) Y を $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間とし，また $f, g: X \to Y$ を2つの連続写像とする．もし各点 $x \in X$ に対して，$f(x)$ と $g(x)$ が Y の中の線分で結ぶことができるなら $f \simeq g$ となることを証明せよ．これから任意の2つの写像 f, $g: X \to \boldsymbol{R}^n$ がホモトピックであることを示せ.

(p) X を任意の位相空間とし $f, g: X \to S^n$ を2つの連続写像で，すべての $x \in X$ に対して $f(x) \neq -g(x)$ をみたすものとする．このとき $f \simeq g$ を証明せよ．(ヒント：$x \to x/\|x\|$ によって与えられる写像 $\boldsymbol{R}^n - \{0\} \to S^{n-1}$ を考え，上の(o)を利用せよ.) これからもし $f: X \to S^n$ が全射でない連続写像ならば，定値写像にホモトピックになることを示せ.

14

道の‘積’

f と g を X の中の道で $f(1)=g(0)$ をみたすものとするとき，12 章と同様次の式で定義される道 $f*g$ を f と g の**積**(product)という．

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

この章では道の‘積’をより詳しく調べてみることにする．正確に言うと，{0, 1} を動かさずにホモトピックな道は同じものと考えた上でその積を考え，この積がいかなる内容のもとで群の公理をみたすかをみてゆこう．

14.1 定　義

X の 2 つの道 f と g が {0, 1} を動かさずにホモトピックのとき，f と g は**同値である**(equivalent)といい，$f \sim g$ と書く．

X の道 f_0 と f_1 が同値であるのは，連続写像 $F: X \times I \to X$ で次の式をみたすものが存在するときであることに注意する．

$$F(t, 0) = f_0(t) \text{ および } F(t, 1) = f_1(t) \quad t \in I$$

$$F(0, s) = f_0(0) \text{ および } F(1, s) = f_0(1) \quad s \in I$$

このとき $F: f_0 \sim f_1$ と書く．図 14.1 をみよ．

補題 13.3 より $\sim$ は X の道の集合での同値関係であることがわかる．道 f の同値類を $[f]$ で表わすことにする．次の補題は同値類の積が

$$[f][g] = [f*g]$$

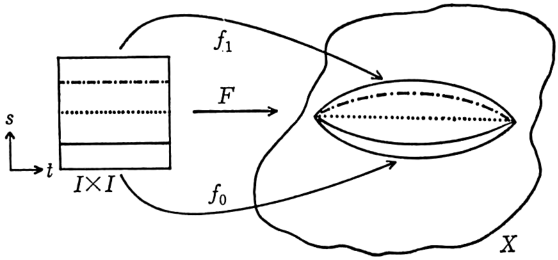


図 14.1

によって矛盾なく定義されることを示している.

14.2 補　　題

f_0, f_1, g_0, g_1 を X の道で $f_0(1)=g_0(0)$ および $f_1(1)=g_1(0)$ をみたすものとする. もし $f_0\sim f_1$ および $g_0\sim g_1$ ならば $f_0*g_0\sim f_1*g_1$ となる.

証明 $F: f_0\sim f_1$ と $G: g_0\sim g_1$ を $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーとする. $H: I\times I\to X$ を次の式で定義する.

$$H(t,s)=\begin{cases} F(2t,s) & 0\le t\le \dfrac{1}{2} \\ G(2t-1,s) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

$F(1,s)=f_0(1)=g_0(0)=G(0,s)$ であるから, 貼り合せ補題により, H は連続である. H が f_0*g_0 と f_1*g_1 の間の $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーになることは容易に確かめられる. 図 14.2 参照.

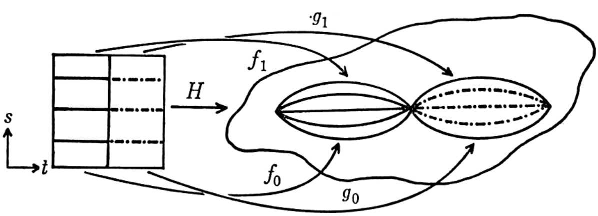


図 14.2

次の補題から道の同値類の積が結合法則をみたすことがわかる. 言い換えれば, 積が意味をもつとき (すなわち $f(1)=g(0)$ および $g(1)=h(0)$ のとき) にはい

つでも次の式が成立する.

$$([f][g])[h]=[f]([g][h])$$

一般には $(f*g)*h \neq f*(g*h)$ であることに注意する．練習問題 14.6(a)参照.

14.3 補　　題

f, g, h を X の中の 3 つの道で $f(1)=g(0)$ および $g(1)=h(0)$ をみたすものとする．このとき $(f*g)*h \sim f*(g*h)$ となる.

証明　はじめに，次の 2 つの道を考える.

$$((f*g)*h)(t)=\begin{cases} f(4t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{4} \\ g(4t-1) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq \dfrac{1}{2} \\ h(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

$$(f*(g*h))(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2} \\ g(4t-2) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq \dfrac{3}{4} \\ h(4t-3) & \dfrac{3}{4}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

これらの道を次のような図式で表わす.



$(f*g)*h$　　　　$f*(g*h)$

上の図式は問題になっている道の代数的記述を極く容易に得るためによく使用される．例えば $(f*g)*h$ の場合，$1/4\leq t\leq 1/2$ のときは g と区間 $[1/4, 1/2]$ から $[0, 1]$ への線型写像(すなわち $t \to 4t-1$) との結合になっている．実際は，1/4 を 0，かつ，1/2 を 1 に写す $[1/4, 1/2]$ から $[0, 1]$ への任意の連続写像でもかまわない(練習問題 14.6(c)参照)．しかし，通常，線型写像とするのが一番簡明である.

$(f*g)*h$ と $f*(g*h)$ との間のホモトピーを作るために，図 14.3 を考える．値 s が与えられたとき f を区間 $[0, (s+1)/4]$，g を区間 $[(s+1)/4, (s+2)/4]$ および h を区間 $[(s+2)/4, 1]$ で使用する．上で述べた方法を使って，$F: X\times I \to X$ を

次の式で定義する.

$$F(t,s)=\begin{cases} f((4t)/(1+s)) & 0\leq t\leq\leq(s+1)/4 \\ g(4t-s-1) & (s+1)/4\leq t\leq(s+2)/4 \\ h((4t-s-2)/(2-s)) & (s+2)/4\leq t\leq 1 \end{cases}$$

写像 F は連続であり，かつ，

$$F(t,0)=((f*g)*h)(t),\qquad F(t,1)=(f*(g*h))(t)$$
$$F(0,s)=f(0)=((f*g)*h)(0),\qquad F(1,s)=h(1)=((f*g)*h)(1)$$

をみたす．したがって F が求めるホモトピーである.

$x\in X$ のとき $\varepsilon_x:I\to X$ を定値道とする．すなわち $\varepsilon_x(t)=x$ である．定値道の同値類は(左または右)単位元の役割をする．すなわち，f を始点 x，終点 y の道としたとき次が成立する.

$$[\varepsilon_x][f]=[f]=[f][\varepsilon_y]$$

この事実は次の補題の中で証明される.

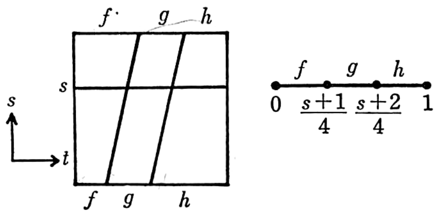


図 14.3

14.4　補　　題

f を始点 x，終点 y の X の中の道とするとき，$\varepsilon_x*f\sim f$ および $f*\varepsilon_y\sim f$ が成立する.

証明　$\varepsilon_x*f\sim f$ についてのみ証明する．$f*\varepsilon_y\sim f$ の証明もまったく同様である．図 14.4 を考えてみる．$F:X\times I\to X$ を

$$F(t,s)=\begin{cases} x & 0\leq t\leq(1-s)/2 \\ f((2t-1+s)/(1+s)) & (1-s)/2\leq t\leq 1 \end{cases}$$

で定義する．このとき $F(t,0)=\varepsilon_x*f$，$F(t,1)=f(t)$ となり，F は $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーになる．▌

最後に道の同値類の逆元を考えよう．そのために，f を道としたとき，$\bar{f}$ を $\bar{f}(t)=f(1-t)$ によって定義される道としよう．$f\sim g$ であるための必要十分条件は $\bar{f}\sim\bar{g}$ であることに注意する(この証明は容易である)．次の補題は $\bar{f}$ の同値

類が f の同値類に逆元として作用していることを示している．すなわち f が x を始点，y を終点とする道であるとき，次が成立する．

$$[f][\bar{f}]=[\varepsilon_x],$$
$$[\bar{f}][f]=[\varepsilon_y]$$

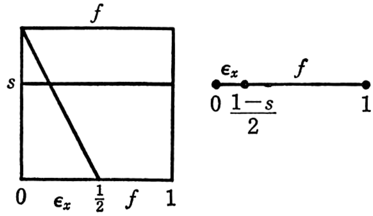


図 14.4

14.5 補　　題

f が x を始点，y を終点とする X の道であるとする，このとき $f*\bar{f}\sim\varepsilon_x$ および $\bar{f}*f\sim\varepsilon_y$ が成り立つ．

証明　$f*\bar{f}\sim\varepsilon_x$ についてのみ証明しよう．道 $f*\bar{f}$ は次の式で与えられる．

$$(f*\bar{f})(t)=\begin{cases} f(2t) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2} \\ f(2-2t) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

これは初めの半分の時間は f に沿って進み，残りの半分の時間で f に沿って逆方向に進む道を表わしている．正確に言うと x から y へ，そして，もとの x へ速さ 2（すなわち 2 倍の‘正規’の速さ）で進む．$s\in I$ に対して $(1-s)$ の比で速さを変化させていくと，各 s に対して x から出発して $f(2(1-s))$ まで到達し，再び x に戻る道が得られる．したがって，$s=0$ のときには，これは $f*\bar{f}$ であり，$s=1$ のときには，x でとどまる道，つまり ε_x である．それゆえ $F:I\times I\to X$ を次の式で定義する．

$$F(t,s)=\begin{cases} f(2t(1-s)) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2} \\ f((2-2t)(1-s)) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1 \end{cases}$$

F は明らかに連続である．そして次が成り立つ．

$$F(t,0)=(f*\bar{f})(t),\qquad F(t,1)=f(0)=\varepsilon_x(1),$$
$$F(0,s)=f(0)=(f*\bar{f})(0),\qquad F(1,s)=f(0)=(f*\bar{f})(1)$$

従って $f*\bar{f}\sim\varepsilon_x$ となる．▌

$f*\bar{f}$ と ε_x の間の別のホモトピー $G:I\times I\to X$ が次の式で与えられる．

$$G(t, s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq (1-s)/2 \\ f(1-s) & (1-s)/2 \leq t \leq (1+s)/2 \\ f(2-2t) & (1+s)/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ここでは f に沿って進むための時間が $(1-s)$ に比例するという考え方である．よって全時間の最初の $(1-s)/2$ 部分で f に沿って進み，点 $f(1-s)$ で停止し，最後の $(1-s)/2$ の時間で f に沿って戻ってくる．したがって $s=0$ のとき $f*\bar{f}$ であり，$s=1$ のとき全時間中，x に停止している．すなわち ε_x となる．

道の同値類とその積について次の章でもう一度考えてみることにする．

14.6　練習問題

(a)　X の道 f, g, h で $f(1)=g(0)$, $g(1)=h(0)$ および

(i)　$(f*g)*h \neq f*(g*h)$,　(ii)　$(f*g)*h=f*(g*h)$

をみたす例を挙げよ．

(b)　$\varepsilon_{f(0)}*f \sim f*\varepsilon_{f(1)}$ の直接的証明を与えよ．

(c)　f を X の中の道として $h: I \to I$ を $h(0)=0$, $h(1)=1$ をみたす連続写像とする．このとき $f \sim fh$ を証明せよ．

(d)　上の (c) を使って $f \sim \varepsilon_x * f$ の直接的証明を与えよ．ここで f は x を始点とする道である．

(e)　$f, g: I \to X$ を x から y への X の道とする．このとき $f \sim g$ であるための必要十分条件は $f*\bar{g} \sim \varepsilon_x$ であることを証明せよ．

(f)　$h: I \to I$ を $h(0)=1$ および $h(1)=0$ をみたす連続写像とする．このとき f を道とすると，$\bar{f} \sim fh$ となることを証明せよ．

(g)　$0=t_0 \leq t_1 \leq t_2=1$ とし $f: I \to X$ を道とする．道 f_1, f_2 を次の式で定義する．

$$f_1(t) = f((1-t)t_0+tt_1),$$
$$f_2(t) = f((1-t)t_1+tt_2)$$

このとき $f_1*f_2 \sim f$ を証明せよ（ヒント：上の (c) を利用せよ）．

(h)　$0=t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_q=1$ とし $f: I \to X$ を道とする．そのとき $f_1, f_2, \cdots, f_q$ を次の式で定義する．

$$f_i(t) = f((1-t)t_{i-1}+tt_i)$$

このとき$[f]=[f_1][f_2]\cdots[f_q]$を証明せよ．

(i) Xを位相空間とし，U, VをXの開集合で$X=U\cup V$となるものとする．fをXの中の道とするとき，$[f]$が次のように表わされることを示せ．

$$[f]=[f_1][f_2]\cdots[f_q]$$

であり，かつ各f_jはUまたはVいずれかの道になる(ヒント：Iの開被覆$\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$を考え，$f^{-1}(U)$と$f^{-1}(V)$を互いに交わらない開区間の和として書き直し，Iのコンパクト性を利用せよ．別の方法として，練習問題 7.13(g)を使用せよ．そして最後に上の(h)を適用せよ)．

(j) (i) $h:(0,1)\to(0,1)$を同相写像とするとき，同相写像$f:[0,1]\to[0,1]$で$f|(0,1)=h$をみたすものが存在することを証明せよ．さらにfがこれをみたす唯一の同相写像であることを証明せよ(ヒント：$\mathring{I}$の中の閉部分集合$(0,a]$を考え，$h((0,a])$があるbまたはcに対して$(0,b]$または$[c,1)$のようになることを示せ)．

(ii) $h:I\to I$を同相写像としたとき，$h(\partial I)=\partial I$を証明せよ(ヒント：連結性を利用せよ)．

(iii) $f,g:I\to X$をXの中の道で$f:I\to f(I)$および$g:I\to g(I)$が同相写像になるものとする．もし$f(I)=g(I)$ならば，$f\sim g$または$f\sim\bar{g}$のいずれかが成立することを証明せよ(ヒント：上の(ii)を利用せよ)．

(iv) $f,g:I\to X$をXの中の閉道で$f:\mathring{I}\to f(\mathring{I})$及び$g:\mathring{I}\to g(\mathring{I})$が同相写像になるものとする．もし$f(I)=g(I)$かつ$f(\partial I)=g(\partial I)$のとき，$f\sim g$または$f\sim\bar{g}$のいずれかが成立することを証明せよ(訳者注，道$f$は$f(0)=f(1)$のとき閉道と呼ばれる)．

15

基　本　群

前の章で空間 X の道の同値類(道が同値であるとは，それらが $\{0,1\}$ を動かさずにホモトープであるときをいう)の集合が群の公理を満足しそうなことがわかった．残った問題は積がいつも定義されるとはかぎらないこと，単位元が“ただよっている”ことである．これらの問題を解決する方法として閉道の概念を考えよう．

15.1　定　　義

道 f が $f(0)=f(1)$ をみたすとき，f は**閉じている**(closed)という．$f(0)=f(1)=x$ のとき，f は x を**基点**(base point)とするという．

閉道のかわりに‘ループ’(loop)という用語を使用している著書もある．

1点 $x\in X$ を基点とする任意の閉道 f, g に対して積 $f*g$ が定義されることに注意する．$x\in X$ を基点とする閉道の同値類の集合を $\pi(X,x)$ で表わす．この集合は $[f],[g]\in\pi(X,x)$ に対して $[f][g]=[f*g]$ で定義される積をもつ．この積は補題 14.2 より矛盾なく定義される．$\pi(X,x)$ を x を基点とする X の**基本群**(fundamental group)という．

15.2　定　　理

$\pi(X,x)$ は群である．

この証明は 14 章の結果による．積は上ですでに定義されている．単位元は $[\varepsilon_x]$ である(補題 14.4 参照)，逆元は $[f]^{-1}=[\bar{f}]$ で与えられる(補題 14.5 参照)，また結合法則は補題 14.3 による．

道の同値類は結合法則をみたすので $[(f*g)*h]$ を簡略に $[f*g*h]$ と書くことが多い．しかしながら，$(f*g*h)$ を $f*g*h$ のように省略して書くことができないことに注意しよう．

これから先に進む前に，次の練習問題を考えておくとよい．

15.3 練 習 問 題

(a) なぜ基点を考慮せずに $\pi(X, x)$ を考えることができないのか？

(b) もし X が離散位相をもつ有限位相空間とすれば $\pi(X, x)=\{1\}$ であることを示せ．

(c) $\boldsymbol{Q}$ を $\boldsymbol{R}$ の通常の位相から誘導された位相をもつ有理数の集合とするとき，$\pi(\boldsymbol{Q}, 0)$ を計算せよ．

(d) X を $\pi(X, x)=\{1\}$ をみたす位相空間とする．f, g を $f(0)=g(0)=x$, $f(1)=g(1)$ をみたす道とするとき $f\sim g$ を示せ（ヒント：練習問題 14.6(e) を適用せよ）．

2 つの相異なる基点 $x, y\in X$ に対して，$\pi(X, x)$ と $\pi(X, y)$ が関係づけられるという根拠は何もない．しかし，x から y への道が存在するとき，1 つの関係が存在する．

15.4 定　　理

$x, y\in X$ とする．x から y への X の道が存在するとき群 $\pi(X, x)$ と $\pi(X, y)$ は同型である．

証明　f を x から y への道とする．g を x を基点とする閉道とするとき $(\bar{f}*g)*f$ は y を基点とする閉道となる．それ故

$$u_f : \pi(X, x) \to \pi(X, y)$$

を次の式で定義する．

$$u_f[g] = [\bar{f}*g*f]$$

この写像は次のことから群の準同型になる．

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f[g*h] \\ &= [\bar{f}*g*h*f] \\ &= [\bar{f}*g*f*\bar{f}*h*f] \end{aligned}$$

$$= [\bar{f}*g*f][\bar{f}*h*f]$$
$$= u_f[g]u_f[h]$$

y から x への道 $\bar{f}$ を使って写像

$$u_{\bar{f}} : \pi(X, y) \to \pi(X, x)$$

を次の式で定義できる. ▌

$$u_{\bar{f}}[h] = [f*h*\bar{f}]$$

$u_{\bar{f}}u_f[g]=[g]$ および $u_f u_{\bar{f}}[h]=[h]$ を示すのは容易である. よって u_f は全単射になるので同型である.

15.5 系

X が道連結空間のとき, 任意の 2 点 $x, y \in X$ に対して $\pi(X, x)$ と $\pi(X, y)$ は同型である.

X が道連結という条件を落せば, 上の結果は必ずしも真ではない ; X が連結のときですら, 一般にこの結果は成立しない. (以下の章で) いくつかの基本群が計算されたときに, 読者は, かってな異なる 2 点 $x, y \in X$ に対して, $\pi(X, x)$ と $\pi(X, y)$ が同型でないような空間 X の例を作ることができるようになるだろう.

系 15.5 より, X が道連結のとき $\pi(X, x)$ から x を省略したくもなる. これは危険である. というのは x から y への異なる道は異なる同型を与えることもあるので, $\pi(X, x)$ から $\pi(X, y)$ への標準的同型というものは存在しないからである.

15.6 練 習 問 題

(a) x から y への 2 つ道 f, g が $\pi(X, x)$ から $\pi(X, y)$ への同じ同型写像を定義する (すなわち $u_f=u_g$) ための必要十分条件は $[g*\bar{f}]$ が $\pi(X, x)$ の中心に入ることであることを示せ. ここで群 G の中心 (center) $Z(G)$ とは次のように定義されるものである.

$$Z(G)=\{a \in G ; すべての\ b \in G\ に対して\ ab=ba\}.$$

(b) $u_f : \pi(X, x) \to \pi(X, y)$ を x から y への道 f によって決められた同型写像とする. このとき u_f が f によらないための必要十分条件は $\pi(X, x)$

が可換群であることを証明せよ.

この章の残りの部分で，位相空間の間の連続写像の基本群への影響について考えてみよう．$\varphi: X \to Y$ を連続写像とするとき，次の事実が成立するのは明らかである.

(i) f, g を X の中の道とすると，$\varphi f, \varphi g$ は Y の道である.

(ii) $f \sim g$ のとき $\varphi f \sim \varphi g$ となる.

(iii) f を $x \in X$ を基点とする X の閉道とするとき φf は $\varphi(x)$ を基点とする Y の中の閉道になる.

したがって，$[f] \in \pi(X, x)$ のとき $[\varphi f]$ は矛盾なく定義された $\pi(Y, \varphi(x))$ の元になる．それ故，写像

$$\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$$

を次の式で定義する.

$$\varphi_*[f] = [\varphi f]$$

15.7 補助定理

φ_* は群の準同型である.

証明は容易である：$\varphi_*([f][g]) = \varphi_*[f*g] = [\varphi_*(f*g)] = [\varphi f*\varphi g]$
$= [\varphi f][\varphi g] = \varphi_*[f]\varphi_*[g]$

15.8 定義

$\varphi: X \to Y$ を連続写像とするとき，$\varphi_*[f] = [\varphi f]$ で定義される準同型 $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ を**誘導された準同型** (induced homomorphism) という.

次の 2 つの結果の証明は容易であるので読者の練習問題とする.

15.9 定理

(i) $\varphi: X \to Y$ と $\phi: Y \to Z$ を連続写像とするとき $(\phi\varphi)_* = \phi_*\varphi_*$ が成立する.

(ii) $1: X \to X$ を恒等写像とすると 1_* は $\pi(X, x)$ 上の恒等準同型になる.

15.10 系

$\varphi : X \to Y$ が同相写像のとき $\varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(x))$ は同型になる.

このように，基本群は位相を代数に移行させる1つの手段を与えている．この移行過程には次のような性格がある.

(i) (基点をもつ)各位相空間に対して1つの群(基本群)が得られる.

(ii) 位相空間の間の各連続写像に対して群の間の準同型(誘導準同型)が得られる.

(iii) 連続写像の合成は誘導準同型の合成をひきおこす.

(iv) 恒等写像は恒等準同型を導く.

(v) 同相写像は同型を導く.

これは**代数的位相幾何**(algebraic topology)がいかなるものかということを示すよい実例を与えている．我々は位相を代数でおきかえ，それから代数の知識を使って位相に関する事柄を学ぶのである．もちろん，2つの位相空間の基本群が同型でなければ位相空間は同相にはなり得ないのである.

注意：上記の性格(i)～(iv)は関手(functor)の1つの例である．したがって基本群は位相(特に基点をもつ位相空間と基点を保つ連続写像の集まり)から代数(特に群の間の準同型の集まり)への関手である.

15.11 練 習 問 題

(a) 単射連続写像 $\varphi : X \to Y$ で φ_* が単射でない例を挙げよ($\pi(S^1, x) \cong \boldsymbol{Z}$, $\pi(D^2, x) = \{1\}$ と仮定せよ).

(b) 全単射連続写像 $\varphi : X \to Y$ で φ_* が全射でない例を挙げよ.

(c) $\varphi : X \to Y$ を連続写像で，f を x から y への道とするとき，
$\varphi_* u_f = u_{\varphi f}\, \varphi_* : \pi(X, x) \to \pi(Y, \varphi(y))$ を示せ．ここで u_f, $u_{\varphi f}$ は f および φf により決定される基本群の同型である.

(d) $\varphi, \phi : X \to Y$ をある点 $x_0 \in X$ に対して $\varphi(x_0) = \phi(x_0)$ をみたす連続写像とする．もし φ と ϕ が x_0 を動かさずにホモトープなら，$\pi(X, x_0)$ から $\pi(Y, \varphi(x_0))$ への同じ準同型を誘導することを証明せよ.

(e) A を X のレトラクト，$r : X \to A$ をレトラクションとする．このとき任

意の点 $a\in A$ に対して

$$i_* : \pi(A, a) \to \pi(X, a)$$

が単射準同型であること(但し，$i : A\to X$ は包含写像)および

$$r_* : \pi(X, a) \to \pi(A, a)$$

が全射準同型であることを証明せよ．

(f) (e)と同じ記号のもとで，$i_*\pi(A, a)$ が $\pi(X, a)$ の正規部分群と仮定する．$\pi(X, a)$ は部分群 $Im(i_*)$ と $\mathrm{Ker}\,(i_*)$ の直積であることを証明せよ．

(g) A が X の強変形レトラクトのとき，包含写像 $i : A\to X$ は任意の $a\in A$ に対して同型

$$i_* : \pi(A, a) \to \pi(X, a)$$

を誘導することを証明せよ．

(h) もし $\varphi : X\to X$ が $\varphi\simeq 1$ をみたす連続写像のとき任意の $x_0\in X$ に対して

$$\varphi_* : \pi(X, x_0) \to \pi(X, \varphi(x_0))$$

が同型であることを示せ(定理 15. 12 の証明参照)．

次の定理は練習問題 15. 11 (d)の一般化である．

15.12 定　理

$\varphi, \psi : X\to Y$ を位相空間の間の連続写像とし $F : \varphi\simeq\psi$ をホモトピーとする．$f : I\to Y$ を $f(t)=F(x_0, t)$ で定義される $\varphi(x_0)$ から $\psi(x_0)$ への道とする．このとき 2 つの準同型写像

$$\varphi_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \varphi(x_0)),$$

$$\psi_* : \pi(X, x_0) \to \pi(Y, \psi(x_0))$$

の間には $\psi_*=u_f\varphi_*$ という関係が存在する．ここで u_f は道 f によって決められる $\pi(Y, \varphi(x_0))$ から $\pi(Y, \psi(x_0))$ への同型写像である．

証明　$[g]\in\pi(X, x_0)$ のとき $[\psi g]=[\bar{f}*\varphi g*f]$ を示そう．いいかえれば，道 $(\bar{f}*\varphi g)*f$ と ψg が同値であることを示せばよい．

$$((\bar{f}*\varphi g)*f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) & 0\le t\le \dfrac{1}{4}, \\ \varphi g(4t-1) & \dfrac{1}{4}\le t\le \dfrac{1}{2}, \\ f(2t-1) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

は次のように書き直せる.

$$((\bar{f}*\varphi g)*f)(t)=\begin{cases}F(x_0,1-4t) & 0\leq t\leq\dfrac{1}{4},\\ F(g(4t-1),0) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq\dfrac{1}{2},\\ F(x_0,2T-1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

一方，ψg に関しては次が成り立つ.

$$\psi g(t)=F(g(t),1)$$

$(\bar{f}*\varphi g)*f$ と φg の間のホモトピーを見つけるために，まず，道 ψg が $(\varepsilon_x*\psi g)*\varepsilon_x$ に同値なことに注意しよう．但し，$x=\psi(x_0)$. 道 $(\varepsilon_x*\psi g)*\varepsilon_x$ は次のように表わされる.

$$((\varepsilon_x*\psi g)*\varepsilon_x)(t)=\begin{cases}F(x_0,1) & 0\leq t\leq\dfrac{1}{4},\\ F(g(4t-1),1) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq\dfrac{1}{2},\\ F(x_0,1) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

それ故，写像 $H:I\times I\to Y$ を次の式で定義する.

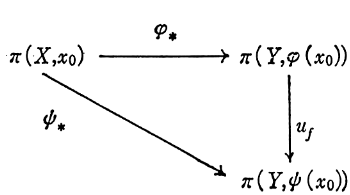
$$H(t,s)=\begin{cases}F(x_0,1-4t(1-s)) & 0\leq t\leq\dfrac{1}{4},\\ F(g(4t-1),s) & \dfrac{1}{4}\leq t\leq\dfrac{1}{2},\\ F(x_0,1+2(t-1)(1-s)) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1.\end{cases}$$

写像 H は明らかに連続であり，かつ，

$$H(t,0)=((\bar{f}*\varphi g)*f)(t),$$
$$H(t,1)=((\varepsilon_x*\psi g)*\varepsilon_x)(t),$$
$$H(0,s)=F(x_0,1)=\psi(x_0),$$
$$H(1,s)=F(x_0,1)=\psi(x_0)$$

を満足する.

したがって，$(\bar{f}*\varphi g)*f\sim(\varepsilon_x*\psi g)*\varepsilon_x\sim\psi g$ となり $u_f\varphi_*=\psi_*$ が証明された.



上の結果の別の述べ方をすると右の図式

が可換であるということになる．

次の 2 つの結果はホモトピー同値な空間に関するものである．

15.13 定　理

$\varphi: X\to Y$ をホモトピー同値とするとき，任意の $x\in X$ に対して $\varphi_*: \pi(X, x)\to\pi(Y, \varphi(x))$ は同型である．

証明　φ はホモトピー同値であるから，連続写像 $\psi: Y\to X$ で $\varphi\psi\simeq 1: Y\to Y$ および $\psi\varphi\simeq 1: X\to X$ を満足するものが存在する．定理 15.12 より $u_f(\psi\varphi)_*=1_*$ が成り立つ．u_f と 1_* が同型であるから $(\psi\varphi)_*=\psi_*\varphi_*$ も同型である．これから ψ_* が全射準同型，φ_* が単射準同型であることがわかる．同様に $\varphi_*\psi_*$ は同型であるから，φ_* は全射準同型，ψ_* は単射準同型になる．したがって，φ_* および ψ_* は同型写像である．

15.14 系

可縮な空間は自明な基本群をもつ．

道連結で，自明な基本群をもつ空間に特別な名称を与えておく．

15.15 定　義

位相空間 X が単連結 (simply connected) であるとは，X が道連結であり，ある (したがって任意の) $x\in X$ に対して $\pi(X, x)=\{1\}$ となるときをいう．

したがって，可縮な空間は単連結である．後でわかるように逆は真ではない．

15.16 練 習 問 題

(a) A を X の弱レトラクトと仮定する (練習問題 13.10 (e) 参照)．このとき $a\in A$ に対して，次の準同型はいかなる性質を持つか？

$i_*: \pi(A, a)\to\pi(X, a)$

$r_*: \pi(X, a)\to\pi(A, a)$

(b) 空間 X が性質 C を持つとは，任意の閉道 $f: I\to X$ に対してホモトピー $F: I\times I\to X$ で

$F(t, 0)=f(t)$, $F(t, 1)$ は定値,

すべての $s\in I$ に対して $F(0,s)=F(1,s)$

をみたすものが存在するときをいう．F は必ずしも $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーとは限らない．X が道連結で性質 C をもつとき X は単連結であることを証明せよ．

(c) $X=U\cup V$ とし U,V は開かつ単連結および $U\cap V$ は道連結とする．このとき X は単連結であることを証明せよ．これを使って $n\geq 2$ のとき S^n が単連結であることを証明せよ（ヒント：練習問題 14.6(i) および (e) を利用せよ）．

この章の最後として 2 つの位相空間の直積の基本群に関する次の結果を証明しよう．

15.17 定　　理

X, Y を 2 つの道連結な位相空間とする．直積 $X\times Y$ の基本群は X と Y の基本群の直積に同型である．

証明　$p: X\times Y\to X$，$q: X\times Y\to Y$ を射影とする．写像

$$\varphi: \pi(X\times Y,(x_0,y_0))\to\pi(X,x_0)\times\pi(Y,y_0)$$

を次の式で定義する．

$$\varphi[f]=(p_*[f],q_*[f])=([pf],[qf]).$$

まず φ が矛盾なく定義されることを確かめる．$f\sim g$ のとき連続写像 $F: I\times I\to X\times Y$ で $F(t,0)=f(t)$，$F(t,1)=g(t)$ および $F(0,s)=F(1,s)=(x_0,y_0)$ をみたすものが存在する．連続写像 $pF: I\times I\to X$ および $qF: I\times I\to Y$ は同値 $pf\sim pg$ および $qf\sim qg$ を与える．よって $\varphi[f]=\varphi[g]$ となり，φ は矛盾なく定義される．

φ が全射であることを示すために，まず $([f_1],[f_2])$ が $\pi(X,x_0)\times\pi(Y,y_0)$ に属していると仮定しよう．$f(t)=(f_1(t),f_2(t))$ によって与えられる写像 $f: I\to X\times Y$ を考えよう．このとき $\varphi[f]=([f_1],[f_2])$ となるのは明らかである．

φ が単射であることを示すために，$\varphi[f]=\varphi[g]$ と仮定する．これは $pf\sim pg$ と $qf\sim qg$ を意味している．$F_1: I\times I\to X$ と $F_2: I\times I\to Y$ をこれらの同値を与えるホモトピーとする．このとき $F(t,s)=(F_1(t,s),F_2(t.s))$ によって定義される $F: I\times I\to X\times Y$ により $f\sim g$ が与えられる．

$f, g: I \to X \times Y$ を $f(1)=g(0)$ となる道とすると $p(f*g)=pf*pg$ および $q(f*g)=qf*qg$ が成り立つのは明らかである．この事実から φ が準同型であることが容易にわかる．▌

次の練習問題で定理 15.17 の別証明を考える．

15.18 練 習 問 題

(a) 2 つの単連結位相空間の直積は単連結であることを証明せよ．

(b) $f: I \to X$, $g: I \to Y$ をそれぞれ $x_0 \in X$ および $y_0 \in Y$ を基点とする閉道とする．$i: X \to X \times Y$, $j: Y \to X \times Y$ を $i(x)=(x, y_0)$, $j(y)=(x_0, y)$ によって定義される包含写像とする．$X \times Y$ の中の 2 つの道 $(if)*(jg)$ と $(jg)*(if)$ は同値であることを示せ．

(c) (b) と同じ記号のもとで $([f], [g]) \to [(if)*(jg)]$ によって与えられる $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ から $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$ への写像は群の同型になることを示せ．

(d) 位相群 (topological group) G とは位相空間でもある群のことで，$\mu(g_1, g_2)=g_1 g_2$ および $\nu(g)=g^{-1}$ で定義される写像

$$\mu: G \times G \to G, \qquad \nu: G \to G$$

が連続になるものをいう．f, h を G の単位元 e を基点とする G の閉道とする．$f \cdot h$ を次の式で定義する．

$$(f \cdot h)(t) = \mu(f(t), h(t)) \qquad t \in I$$

このとき

$$f*h \sim f \cdot h \sim h*f$$

を証明しかつ $\pi(G, e)$ が可換群であることを導け．さらに準同型写像

$$\nu_*: \pi(G, e) \to \pi(G, e)$$

が $\nu_*[f]=[f]^{-1}$ を満足することを示せ．

(e) $S^1 \subseteq \boldsymbol{C}$ に対して $\mu(z_1, z_2)=z_1 z_2$ によって $\mu: S^1 \times S^1 \to S^1$ を，また，$\nu(z)=z^{-1}$ によって $\nu: S^1 \to S^1$ を定義する．このとき S^1 は位相群であることを証明せよ．また $\pi(S^1, 1)$ が可換群であることを導け．

(f) この問題は (d) の一般化である．x_0 を位相空間 X の 1 点とする．連続写像 $\mu: X \times X \to X$ で

$$\mu(x, x_0) = \mu(x_0, x) = x$$

をみたすものが存在すると仮定する．$f, g : I \to X$ を $x_0 \in X$ を基点とする閉道，$i, j : X \to X \times X$ を $i(x) = (x, x_0)$, $j(x) = (x_0, x)$ で定義される包含写像とする．このとき

$$\mu((if)*(ig)) = f*g$$

を証明せよ．上の(b)から $\pi(X, x_0)$ が可換群であることを示せ．

(g) この問題は上の(f)の一般化である．位相空間 X に対して連続写像 $\mu : X \times X \to X$ と 1 点 $x_0 \in X$ で $\mu i \simeq 1(\mathrm{rel}\ x_0)$ および $\mu j \simeq 1(\mathrm{rel}\ x_0)$ をみたすものが存在するとき，X は(Heinz Hopf にちなんで) ***H*-空間** (H-space) と呼ばれる．また $\mu(x_0, x_0) = x_0$ に注意する．このとき H-空間の基本群 $\pi(X, x_0)$ が可換であることを証明せよ（ヒント：$\mu((if)*(ig)) \sim f*g$ を示せ）．

基本群 $\pi(X, x_0)$ を $\pi_1(X, x_0)$ と書くことも多い．ここで‘1’は基本群を定義するのに道（すなわち $I \subseteq \boldsymbol{R}^1$ からの写像）を使っていることに由来する．もっと一般的に $I^n \subseteq \boldsymbol{R}^n$ から X への写像を使って $\pi_n(X, x_0)$ を定義することができる．これを x_0 における X の ***n* 次元ホモトピー群** (the n-th homotopy group) という．ここではしかるべき定義を簡単に述べておくことにする．興味のない読者はそのまま次の章に進んでもかまわない．

∂I^n は（いつものように）I^n の境界を表わすものとする．すなわち

$$\partial I^n = \{(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in I^n \text{ ; ある } i \text{ に対して } t_i = 0 \text{ または } 1\}.$$

集合 $\pi_n(X, x_0)$ は $f(\partial I^n) = x_0$ となる連続写像 $f : I^n \to X$ の ∂I^n を動かさないホモトピー類からなるものとする．このとき積

$$[f][g] = [f*g]$$

を次の式で定義する．

$$(f*g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \cdots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \dfrac{1}{2} \\ g(2t_1 - 1, t_2, \cdots, t_n) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

この積が矛盾なく定義され，またそれが $\pi_n(X, x_0)$ に群の構造を与えていることは容易に確められる．もちろん $n=1$ のときは，基本群になる．後でわかるように基本群は必ずしも可換群ではない．しかし $n \geq 2$ のとき $\pi_n(X, x_0)$ は常に

可換群である.

15.19 練習問題

(a) $\pi_n(X, x_0)$ が群であることを証明せよ.

(b) x_0 から x_1 への X の中の道が存在するとき $\pi_n(X, x_0)$ と $\pi_n(X, x_1)$ が同型であることを示せ.

(c) 連続写像 $\varphi : X \to Y$ に対して $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ を定義せよ. また φ_* が準同型であることを証明せよ. n 次元ホモトピー群に対しても定理 15.9 が成立することを示せ. これから同相な位相空間が同型なホモトピー群をもつことを導け.

(d) ホモトピー同値な位相空間は同型なホモトピー群をもつことを証明せよ.

(e) $n \geq 2$ のとき $\pi_n(X, x_0)$ が可換群であることを証明せよ(ヒント: $f*g$ と $g*f$ との間のホモトピーについては図 15.1 を参照せよ).

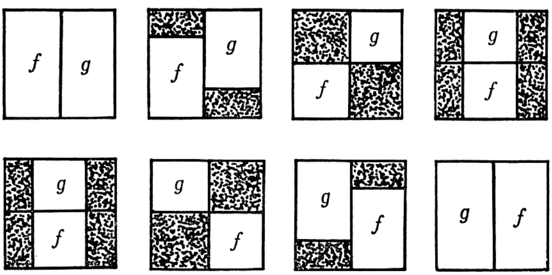


図 15.1

注意: J. H. C. Whitehead によって上の(d)のある意味での逆が与えられている. その定理の主張は次のとおりである. ある種の位相空間(それは道連結 CW 複体と呼ばれる) X, Y に対し, すべての $n \geq 1$ に対して同型写像 $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ をひきおこす連続写像 $\varphi : X \to Y$ はホモトピー同値である.

16

円周の基本群

いくつかの自明な場合を除いては，位相空間の基本群の計算をいまのところ行っていない．この章では円周 S^1 の基本群を計算しよう．これは整数全体の群 $\boldsymbol{Z}$ に同型になる．直観的に言うと，この結果は次のようにして示される．f を $1\in S^1$ を基点とする S^1 の閉道で円周に何周か巻きついているとする．巻きつけている回数を f の巻きつき数または写像度という ($f(0)=1$ から出発して，t を増加させていくときの $f(t)$ を考える．反時計回りに円周を 1 回転するごとに点数 $+1$ を記録し，時計回りに円周を 1 回転するごとに点数 -1 を記録しておく．全点数の総和を f の巻きつき数または写像度という)．このようにして 1 を基点とする各閉道 f に 1 つの整数を対応できる．結果として 2 つの閉道が同値(すなわち，$\{0,1\}$ を動かさずホモトープ)であるための必要十分条件はそれらの写像度が一致することであることがわかる．最後に，各 n に対して写像度 n の閉道の存在を示す．

もっと正確な閉道の写像度の定義を得るために次のような実数空間 $\boldsymbol{R}$ から S^1 の上への写像を考える．

$$e:\boldsymbol{R}\to S^1$$
$$t\to \exp(2\pi it).$$

幾何学的に言えば射影 e をもつらせん状の実数空間を考えている(図 16.1 参照)．$e^{-1}(1)=\boldsymbol{Z}\subseteq\boldsymbol{R}$ に注意する．ここでの着想は $f(0)=f(1)=1$ をみたす $f:I\to S^1$ が与えられたときに $\tilde{f}(0)=0$ と $e\tilde{f}=f$ をみたす唯一つの写像 $\tilde{f}:I\to\boldsymbol{R}$ の存在を示すことにある．写像 $\tilde{f}$ を f の持ち上げ

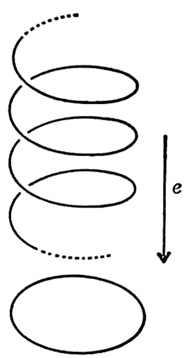


図 16.1

(lift) という．$f(1)=1$ であるから $\tilde{f}(1)\in e^{-1}(1)=\boldsymbol{Z}$ となる．この整数で f の写像度が定義される．それに続いて f_0 と f_1 が S^1 の中の同値な道のとき $\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$ を示す．これが写像 $\pi(S^1,1)\to\boldsymbol{Z}$ を定義する．最後にこの写像が群の同型であることを示す．

いまから与える $\pi(S^1,1)$ の‘計算方法’はいくつかの他の位相空間に一般化される(この章の後の 3 つの章を参照せよ)．実際次の補題は 17 章における重要な定義の出発点である．

16.1 補　　題

U を $S^1-\{1\}$ の任意の開集合とし，$V=I\cap e^{-1}(U)\subseteq\boldsymbol{R}$ とおく．このとき $e^{-1}(U)$ は互いに交わらぬ開集合 $V+n=\{v+n\ ;\ v\in V\}$，$n\in\boldsymbol{Z}$ の和集合となり，各 $V+n$ は e によって U の上に同相に写される．

証明　U が開区間のときのみ証明する．一般の場合は読者に委ねる．つまり，ある a,b に対して

$$U=\{\exp(2\pi it)\ ;\ 0\leq a<t<b\leq 1\}$$

であるとする．このとき $V=(a,b)$，$V+n=(a+n,b+n)$ となる．$e^{-1}(U)$ が互いに交わらぬ開集合 $V+n$，$n\in\boldsymbol{Z}$ の和集合となるのは明らかである．$e_n,\bar{e}_n$ をそれぞれ e の $(a+n,b+n)$ および $[a+n,b+n]$ への制限とする．明らかに $\bar{e}_n$ は連続であり，e_n は連続かつ全単射である．次に $e_n{}^{-1}$ が連続であることを示す．W を $(a+n,b+n)$ の閉部分集合とすると，上の注意より，$W\cup\{a+n,b+n\}$ は $[a+n,b+n]$ の閉部分集合(したがってコンパクト)になる．定理 7.8 より $\bar{e}(W\cup\{a+n,b+n\})$ はコンパクトである．S^1 は Hausdorff であるから定理 8.7 より $\bar{e}(W\cup\{a+n,b+n\})$ は S^1 の(したがって $\bar{e}([a+n,b+n])$ の)閉部分集合である．それ故，$e(W)=\bar{e}(W\cup\{a+n,b+n\})\cap e((a+n,b+n))$ は $e((a+n,b+n))=U$ の閉部分集合である．よって $e_n{}^{-1}$ は連続であり，e_n は同相写像となる．

16.2 練 習 問 題

x を S^1 の任意の点とするとき上の定理は $S^1-\{x\}$ について成り立つことを示せ．

16.3 系

$f: X \to S^1$ が全射でないとき，f は零ホモトープになる．

証明 $x \notin Im(f)$ とすると $S^1 - \{x\}$ は可縮な空間 $(0,1)$ に同相である．このことから系の結果が得られる（ある s に対し $x = \exp(2\pi is)$ および $S^1 = \{\exp(2\pi it) ; s \leq t < 1+s\}$ となる）．∎

ここで，この章における最初の重要な定理を証明する．これは（$e : \boldsymbol{R} \to S^1$ に対する）**道の持ち上げ定理**（path lifting theorem）と呼ばれる．

16.4 定　　理

任意の連続写像 $f: I \to S^1$ は持ち上げ $\tilde{f}: I \to \boldsymbol{R}$ をもつ．さらに $e(x_0) = f(0)$ となる $x_0 \in \boldsymbol{R}$ が与えられているとき，$\tilde{f}(0) = x_0$ となる唯一つの持ち上げ $\tilde{f}$ が存在する．

証明 各 $x \in S^1$ に対して U_x を x の開近傍とし，$e^{-1}(U_x)$ は互いに交わらぬ $\boldsymbol{R}$ の開集合の和集合であり，かつ各開集合は e によって U_x の上に同相に写されているとする．集合 $\{f^{-1}(U_x) ; x \in S^1\}$ は $\{(x_j, y_j) \cap I ; j \in J\}$ のような I の開被覆とみなせる．I はコンパクトだから次のような有限開被覆が存在する．

$$[0, t_1 + \varepsilon_1),\ (t_2 - \varepsilon_2, t_2 + \varepsilon_2),\ \cdots,\ (t_n - \varepsilon_n, 1]$$

但し，$i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して $t_i + \varepsilon_i > t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}$ とする．このとき $i = 1, 2, \cdots, n-1$ に対して $a_i \in (t_{i+1} - \varepsilon_{i+1}, t_i + \varepsilon_i)$ を

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = 1$$

をみたすように選ぶ．明らかに $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S^1$ であるが，さらに $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S_i$ となる．ここで S_i は S^1 の 1 つの開集合で，$e^{-1}(S_i)$ が e によって S_i の上に同相に写される $\boldsymbol{R}$ の開集合で互いに交わらぬものの和集合である．$k = 0, 1, \cdots, n$ に対して $\tilde{f}_k(0) = a_k$ となる $[0, a_k]$ 上の持ち上げ $\tilde{f}_k$ を帰納的に定義していく．$k=0$ のときは自明で，$\tilde{f}_0(0) = x_0$ 以外に存在しない．次に $\tilde{f}_k : [0, a_k] \to \boldsymbol{R}$ が一意的に定義されていると仮定する．ここで $f([a_k, a_{k+1}]) \subseteq S_k$ であり，$e^{-1}(S_k)$ は各 $j \in J$ に対して $e | W_j : W_j \to S_k$ が同相写像になる互いに交わらぬ $\{W_j ; j \in J\}$ の和集合であった．$\{W_j ; j \in J\}$ の中に唯一つ $\tilde{f}_k(a_k) \in W$ となるものが存在する．図 16.2 参照．$[a_k, a_{k+1}]$ は道連結であるから，いかなる拡張 $\tilde{f}_{k+1}$ も $[a_k, a_{k+1}]$ を W の中に写す．制限 $e | W : W \to S_k$ は同相写像であるから，

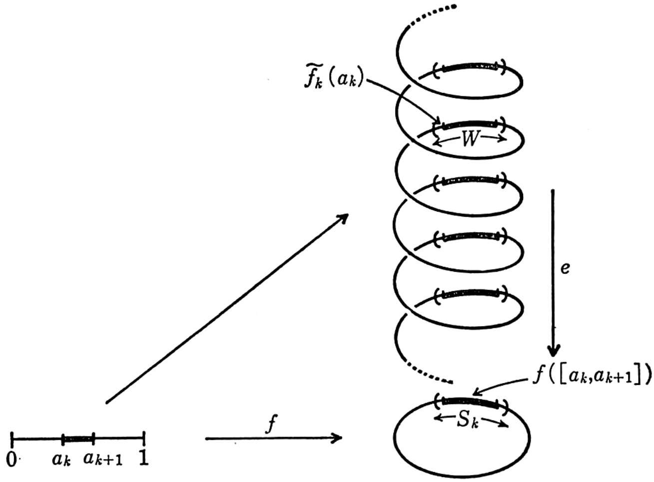


図 16.2

$e\rho = f|[a_k, a_{k+1}]$ をみたす唯一つの写像 $\rho : [a_k, a_{k+1}] \to W$ が存在する(実際，$\rho = (e|W)^{-1}f$ となる)．よって $\tilde{f}_{k+1}$ を

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s) & 0 \leq s \leq a_k \\ \rho(s) & a_k \leq s \leq a_{k+1} \end{cases}$$

で定義すると，$\tilde{f}_k(a_k) = \rho(a_k)$ だから貼り合せ補題より連続写像になり，その作り方から一意的である．したがって帰納法により $\tilde{f}$ が得られる．▌

この定理を使って S^1 の中の閉道の写像度を定義することができる．f を1を基点とする S^1 の中の閉道とし，$\tilde{f} : I \to \boldsymbol{R}$ を $\tilde{f}(0) = 0$ となる唯一つの持ち上げとする．$e^{-1}(f(1)) = e^{-1}(1) = \boldsymbol{Z}$ であるから $\tilde{f}(1)$ は整数になる．これを f の写像度 (degree) という．同値な道が同値な写像度をもつことを示すため，まず同値な道が同値な持ち上げをもつことを示すことにする．このことは前の定理の I を I^2 で置きかえることによって得られる．

16.5 補　　題

連続写像 $F : I^2 \to S^1$ は持ち上げ $\tilde{F} : I^2 \to \boldsymbol{R}$ をもつ．さらに $e(x_0) = F(0, 0)$ なる $x_0 \in \boldsymbol{R}$ が与えられているとき $\tilde{F}(0, 0) = x_0$ となる持ち上げ $\tilde{F}$ は唯一つ存在する．

証明　証明は定理 16.4 とまったく同様である．I^2 はコンパクトだから，

$$0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1,$$
$$0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_m = 1$$

が存在して，$F(R_{i,j}) \subset S^1$ となり，その上定理 16.4 の S_k と同様の性質をもつ S^1 の開部分集合 $S_{i,j}$ が存在して $F(R_{i,j}) \subset S_{i,j}$ となる．ここで $R_{i,j}$ は次の式で与えられる長方形である．

$$R_{i,j} = \{(t, s) \in I^2\ ;\ a_i \leq t \leq a_{i+1},\ \ b_j \leq s \leq b_{j+1}\}.$$

持ち上げ $\tilde{F}$ は定理 16.4 と同様な方法で長方形

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \cdots, R_{0,m}, R_{1,0}, R_{1,1}, \cdots$$

上に帰納的に定義される．詳細は読者の練習問題とする．

系として $e : \boldsymbol{R} \to S^1$ に対するモノドロミー定理 (monodoromy theorem) と呼ばれるものが得られる．それは同値な道が同じ写像度をもつことを主張している．

16.6　系

f_0 と f_1 を 1 を基点とする S^1 の中の同値な道とする．$\tilde{f}_0$ と $\tilde{f}_1$ を $\tilde{f}_0(0)=\tilde{f}_1(0)$ となる持ち上げをするとき $\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$ となる．

証明　F を f_0 と f_1 の間の $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーとする．$\tilde{F} : I^2 \to \boldsymbol{R}$ を $\tilde{F}(0,0)=\tilde{f}_0(0)=\tilde{f}_1(0)$ となる唯一つの持ち上げとする．$F(t,0)=f_0(t)$ および $F(t,1)=f_1(t)$ であるから，$\tilde{F}(t,0)=\tilde{f}_0(t)$ および $\tilde{F}(t,1)=\tilde{f}_1(t)$ が成り立つ．$F(1,t)=f_0(1)=f_1(1)$ であるから $\tilde{F}(1,t)$ は $\tilde{f}_0(1)$ から $\tilde{f}_1(1)$ への道になる．一方，$\tilde{F}(1,t) \in e^{-1}(f_0(1)) \cong \boldsymbol{Z}$ であるから，$\tilde{F}(1,t)$ は定値であり，よって $\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$ となる．これで証明は完成した．実際，$\tilde{F}$ は $\tilde{f}_0$ と $\tilde{f}_1$ の間の $\{0,1\}$ を動かさないホモトピーであることに注意しよう．▌

これで円周の基本群を計算する準備ができた．

16.7　定　　理

$$\pi(S^1, 1) \cong \boldsymbol{Z}$$

証明　$\varphi : \pi(S^1,1) \to \boldsymbol{Z}$ を $\varphi([f])=\deg(f)$ ($=f$ の写像度) で定義する．$\tilde{f}$ を $\tilde{f}(0)=0$ となる f の唯一つの持ち上げとするとき，$\deg(f)=\tilde{f}(1)$ である．系

16.6より関数φは矛盾なく定義される．φが群の同型であることを示そう．

まずφが準同型であることを示す．$l_a(f)$を$a\in e^{-1}(f(0))$を始点とするfの持ち上げとする．1を始点とするS^1の中の道に対して$l_0(f)=\tilde{f}$および$l_a(f)(t)=\tilde{f}(t)+a$が成り立つ．$b=\tilde{f}(1)+a$とすると，次が成り立つのは明らかである．

$$l_a(f*g)=l_a(f)*l_b(g)$$

したがって，$[f],[g]\in\pi(S^1,1)$とすると

$$\begin{aligned}\varphi([f][g])=\varphi([f*g])&=\widetilde{f*g}(1)\\&=l_0(f*g)(1)\\&=(l_0(f)*l_b(g))(1)\qquad(\text{但し，}b=\tilde{f}(1))\\&=l_b(g)(1)\\&=\tilde{f}(1)+\tilde{g}(1)\\&=\varphi([f])+\varphi([g])\end{aligned}$$

となり，φが準同型であることが示された．

φが全射であることを示すのはむしろ容易である．$n\in\boldsymbol{Z}$が与えられたとき，$g:I\to\boldsymbol{R}$を$g(t)=nt$で定義すると$eg:I\to S^1$は1を基点とする閉道になる．gは$g(0)=0$となるegの持ち上げであるから$\varphi([eg])=\deg(eg)=g(1)=n$となり，$\varphi$が全射であることがわかる．

φが単射であることを示すために$\varphi([f])=0$（すなわち$\deg(f)=0$）と仮定する．これはfの持ち上げ$\tilde{f}$が$\tilde{f}(0)=\tilde{f}(1)=0$をみたすことを意味する．$\boldsymbol{R}$は可縮であるから$\tilde{f}\simeq\varepsilon_0\,(\mathrm{rel}\,\{0,1\})$が成り立つ．言い換えるならば，写像$F:I^2\to\boldsymbol{R}$で$F(0,t)=\tilde{f}(t)$, $F(1,t)=0$及び$F(s,0)=F(s,1)=0$をみたすものが存在する．実際$F(s,t)=(1-s)\tilde{f}(t)$とおけばよい．しかし$eF:I^2\to S^1$は$eF(0,t)=f(t)$, $eF(1,t)=1$, $eF(s,0)=eF(s,1)=1$をみたすので$f\simeq\varepsilon_1\,(\mathrm{rel}\,\{0,1\})$となる．すなわち$[f]=1\in\pi(S^1,1)$．これは$\varphi$が単射であることを示している．よって$\varphi$は同型である．▌

これで，この章の主要な結果の証明が終った．系として次が直ちに得られる．

16.8　系

トーラスの基本群は$\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$である．

2つの応用を与えてこの章を終ることにしよう．最初はよく知られた**代数学の基本定理**(fundamental theorem of algebra)である．

16.9 系

すべての定値でない複素多項式は根をもつ.

証明 一般性を失うことなく多項式は次の形をしていると仮定してよい.

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k.$$

ここで $k \geq 1$. P が零点をもたない(すなわち根をもたない)と仮定する. $0 \leq t \leq 1$ および $r \geq 0$ に対して写像 $G : I \times [0, \infty) \to S^1 \subseteq \boldsymbol{C}$ を

$$G(t, r) = \frac{P(r \exp(2\pi it))}{|P(r \exp(2\pi it))|} \cdot \frac{|P(r)|}{P(r)}$$

で定義する. 明らかに G は連続である. $F : I^2 \to S^1$ を

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, s/(1-s)) & 0 \leq t \leq 1,\ 0 \leq s < 1, \\ \exp(2\pi ikt) & 0 \leq t \leq 1,\ s = 1 \end{cases}$$

で定義する.

$$\lim_{s \to 1} F(t, s) = \lim_{s \to 1} G(t, s/(1-s)) = \lim_{r \to \infty} G(t, r) = (\exp(2\pi it))^k$$

となるから F は連続である. よって, F は $f_0(t) = F(t, 0)$ と $f_1(t) = F(t, 1)$ の間の $\{0, 1\}$ を動かさないホモトピーである. しかし $f_0(t) = 1$ および $f_1(t) = \exp(2\pi ikt)$ であるから $\deg(f_0) = 0$ となる. 一方 $\deg(f_1) = k$ となり, ($k = 0$ でないとき) これは矛盾である. ▌

2番目の応用は**平面のブラウワーの不動点定理** (Brouwer's fixed point theorem in the plane) という名で呼ばれるものである. 10章では I に対する不動点定理を証明したが, 次の結果は D^2 に対する類似の定理である. この結果は高次元においても成立するが, その証明では基本群以外の道具を必要とする.

16.10 系

任意の連続写像 $f : D^2 \to D^2$ は不動点, すなわち $x = f(x)$ となる点 x をもつ.

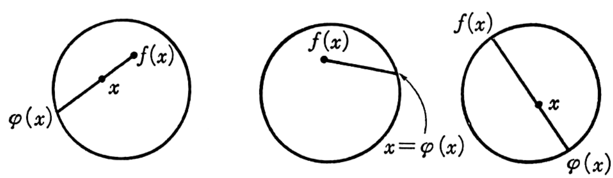
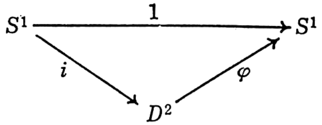
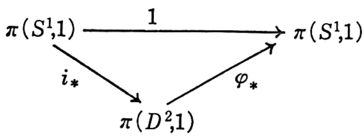
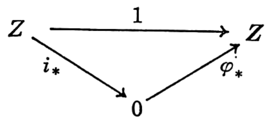


図 16.3







証明　すべての $x\in D^2$ に対して $x\neq f(x)$ と仮定する．そのとき $f(x)$ から x への線分の延長と S^1 の交点によって得られる S^1 上の点 $\varphi(x)$ によって，関数 $\varphi: D^2\to S^1$ を定義する．図 16.3 参照．

φ が連続であることは自明である．$i: S^1\to D^2$ を包含写像とすると，$\varphi i=1$ となり左上の図式は可換になる．

これより，その次の図式も可換になる．

D^2 は可縮であるから $\pi(D^2,1)=\{1\}$ となり，左の可換な図式を得る．

これは不可能である．この矛盾が結果を証明している．▌

16.11　練 習 問 題

(a)　$[f]\in\pi(S^1,1)$ が与えられているとき，α を曲線 $\{f(t)\,;\,t\in I\}$ として $w(f)$ を

$$w(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha\frac{dz}{z}$$

で定義する．このとき次を証明せよ．

(i)　$w(f)$ は整数，

(ii)　$w(f)$ は $f\in[f]$ の選択によらない，

(iii)　$w(f)=\deg(f)$.

(b)　$f: S^1\to S^1$ をある整数 k に対して $f(z)=z^k$ によって定義される写像とする．同型 $\pi(S,1)\cong\boldsymbol{Z}$ のもとで $f_*: \pi(S^1,1)\to\pi(S^1,1)$ を表現せよ．

(c)　α,β を次の式で与えられる $S^1\times S^1$ の中の閉道とする．

$\alpha(t)=(\exp(2\pi it),1)$，　$\beta(t)=(1,\exp(2\pi it))$.

図式を利用する方法で $\alpha*\beta\sim\beta*\alpha$ を示せ．

(d)　$\pi(\underbrace{S^1\times S^1\times\cdots\times S^1}_{n},\ (1,1,\cdots,1))$ を計算せよ．

(e)　練習問題 15.16(c) を使って，トーラスが球面 S^2 に同相でないことを示

せ．

(f)　$D^2-\{z\}$ が単連結になるような点 $z\in D^2$ の集合は S^1 と一致することを証明せよ．このとき $f: D^2\to D^2$ が同相写像であれば $f(S^1)=S^1$ となることを証明せよ．

(g)　次の位相空間の基本群を求めよ．

(i)　$\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$

(ii)　$\boldsymbol{C}^*/G$．ここで $\varphi(z)=2z$ とするとき G を $\{\varphi^n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ で定義される同相写像の群とする．

(iii)　$\boldsymbol{C}^*/H$．ここで $\psi(z)=2\bar{z}$ とし，$H=\{\psi^n\,;\,n\in\boldsymbol{Z}\}$ とする．

(iv)　$\boldsymbol{C}^*/\{e, a\}$．ここで e を恒等同相写像および $az=-\bar{z}$ とする．

17

被覆空間

以下の章で 16 章の結果および概念の一般化を考える.

$p:\tilde{X}\to X$ を連続写像とする. 開集合 $U\subseteq X$ が p によって**均等に覆われる** (evenly covered) とは $p^{-1}(U)$ が互いに素な(つまり交わらぬ) $\tilde{X}$ の開集合の和集合で, かつ, 各開部分集合が p によって U の上に同相にうつされるときをいう. 連続写像 $p:\tilde{X}\to X$ が**被覆写像** (covering map) であるとは, 各点 $x\in X$ が p によって均等に覆われる開近傍をもつときをいう. このとき $p:\tilde{X}\to X$ を**被覆** (covering), $\tilde{X}$ を X の**被覆空間** (covering space), X を被覆写像 p の**底空間** (base space) という.

言い換えれば, $p:\tilde{X}\to X$ が被覆であるとは, 次をみたすときをいう.

(i) p は上への写像, かつ

(ii) すべての $x\in X$ に対して, x の開近傍 U が存在して, $\tilde{X}$ の或る部分集合の集まり $\{U_j\,;\,j\in J\}$ に対して

$$p^{-1}(U)=\bigcup_{j\in J}U_j$$

となる. 但し, $\{U_j\,;\,j\in J\}$ は $j\neq k$ のとき $U_j\cap U_k=\emptyset$ であり, 各 $j\in J$ に対して $p|U_j:U_j\to U$ は同相写像となっている.

16 章より $e:\boldsymbol{R}\to S^1$ は被覆である. また, 明らかに任意の同相写像 $h:\tilde{X}\to X$ は被覆写像である. 自明な被覆写像のもう 1 つの例は, $\tilde{X}$ が $X\times Y$ で Y を離散位相空間とし p を標準的な射影とした場合である. 興味ある一例は $p_n(z)=z^n$ で与えられる $p_n:S^1\to S^1$ ($n\neq 1, S^1\subset\boldsymbol{C}$ とみなす) である. これが実際に, 被覆写像であるのを示すには, すべての $x\in S^1$ に対して $S^1-\{x\}$ が p によって均等に覆われていることに注意すればよい.

ある種の G-空間は被覆写像を誘導する．X を G-空間と仮定する．各点 $x \in X$ に対して x のある開近傍 V が存在し，すべての $g, g' \in G$, $g \neq g'$ に対して $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$ となるとき，G の X 上への作用は**真性不連続**(properly discontinuous)であるという．$x \in V$ のとき $g \cdot x \in g \cdot V$ だから，作用が真性不連続のときすべての $g \in G$, $g \neq 1$ およびすべての $x \in X$ に対して $g \cdot x \neq x$ が成り立つ．その他の例を与える前に次の定理を証明する．この定理によって，真性不連続作用を導入した理由がわかる．

17.1 定　理

X を G-空間とする．G の X 上への作用が真性不連続のとき $p\,;\tilde{X} \to X/G$ は被覆である．

証明　まず $p\,;\tilde{X} \to X/G$ が連続な全射であることに注意する．また定理 5.12 より p は開写像になる．U を $x \in X$ の近傍で真性不連続の条件をみたすものとする．p は開写像であるから，$p(U)$ は $G \cdot x = p(x)$ の開近傍になり $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$ となる(定理 5.12 の証明参照)．ここで $\{g \cdot U\,; g \in G\}$ は互いに素な X の開集合の集まりである．さらに，$p|g \cdot U\,; g \cdot U \to p(U)$ は連続な開全単射である．よって同相写像になる．▌

$x \to x+n$ で与えられる $\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{R}$ 上の作用は真性不連続である．$x \in \boldsymbol{R}$ かつ $\varepsilon < 1/2$ とすれば，$(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ はしかるべき条件をみたす x の開近傍となっているからである．$\boldsymbol{Z}$ の $\boldsymbol{R}$ 上への作用は $\boldsymbol{R}$ を $\boldsymbol{Z}$-空間にするので，$p: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ は被覆写像になる．(読者はこの例が $e: \boldsymbol{R} \to S^1$ と一致することを確かめよ)．

次の例は自然な写像 $S^n \to \boldsymbol{R}P^n$ が被覆写像であることを示している．$\boldsymbol{Z}_2$-空間 S^n の作用が $(\pm 1) \cdot x = \pm x$ で与えられているとする．但し，$\boldsymbol{Z}_2 = \{1, -1\}$．$x \in S^n$ に対して集合

$$\{y \in S^n\,; \|y-x\| < 1/2\}$$

は x の開近傍で真性不連続の条件をみたすものになる．別の方法としては，$x \neq -x$ かつ S^n はハウスドルフであるから，$x, -x$ それぞれの互いに素な開近傍 V, W が存在する．このとき，$V \cap (-W)$ は真性不連続の条件をみたす x の近傍になる．この例を次のように一般化する．すべての $x \in X$ と $g \in G$, $g \neq 1$ に対して $g \cdot x \neq x$ となるとき，群 G は X に**自由に**(freely)作用するまたは**自由**

作用(free action)であるという.

17.2 定　理

Gをハウスドルフ空間Xに自由に作用している有限群とするとき，GのX上への作用は真性不連続である.

証明　$G=\{1=g_0, g_1, \cdots, g_n\}$とおく．$X$はハウスドルフ空間であるから$g_0\cdot x, g_1\cdot x, \cdots, g_n\cdot x$それぞれの開近傍$U_0, U_1, \cdots, U_n$で$j=1, 2, \cdots, n$に対して$U_0\cap U_j=\emptyset$となるものが存在する．$U$を共通部分$\bigcap_{i=0}^{n} g_j{}^{-1}\cdot U_j$とすると，$U$は明らかに$x$の開近傍である．$g_i\cdot U=\bigcap_{j=1}^{n} g_i\cdot(g_j{}^{-1}\cdot U_j)\subseteq U_i$となり，$g_k\cdot U\subseteq U_k$かつ$U\subseteq U_0$だから$i\neq j$に対して

$$\begin{aligned} g_i\cdot U \cap g_j\cdot U &= g_j\cdot((g_j{}^{-1}g_i\cdot U)\cap U) \\ &= g_j\cdot(g_k\cdot U\cap U) \qquad (\text{ある } k\neq 0 \text{ に対して}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

したがって，GのX上への作用は真性不連続である. ▌

自由作用のよい例は巡回群$\boldsymbol{Z}_p$と3-球面$S^3\subset\boldsymbol{C}^2$,

$$S^3 = \{(z_0, z_1)\in\boldsymbol{C}^2 ; |z_0|^2+|z_1|^2=1\}$$

によって与えられる．p, qが互いに素のとき写像$h ; S^3\to S^3$を

$$h(z_0, z_1) = (\{\exp(2\pi i/p)\}z_0,\ \{\exp(2\pi iq/p)\}z_1)$$

で定義する．このときhはS^3の同相写像で$h^p=1$となる．$\boldsymbol{Z}_p$の$\boldsymbol{S}^3$への作用を

$$\boldsymbol{n}\cdot(z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1),\ \ n\in\boldsymbol{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$$

で定義する．この作用は自由であり，S^3はハウスドルフであるから$S^3\to S^3/\boldsymbol{Z}_p$は被覆写像になる．商空間$S^3/\boldsymbol{Z}_p$を**レンズ空間**(Lens space)といい$L(p, q)$と書く．$L(2, 1)$は$\boldsymbol{R}P^3$であることに注意しよう．上の例を$\boldsymbol{Z}_p$の$S^{2n+1}\subset\boldsymbol{C}^{n+1}$上への作用へと一般化できる．詳細は読者に委ねる.

この時点で被覆写像についてのいくつかの一般的な結果が得られた．群の作用によって作られた例においては，被覆写像は開写像であり底空間は被覆写像に関する商位相をもっていたことを想起しよう．この事実はすべての被覆に対しても成立する.

17.3 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ を被覆写像とする．このとき次が成り立つ．

(i) p は開写像

(ii) X は p に関する商位相をもつ．

証明 U を $\tilde{X}$ の開集合とし $x\in p(U)$ とする．p は被覆写像であるから均等に覆われる x の開近傍 V がある．$\tilde{x}\in p^{-1}(x)\cap U$ とする．$\tilde{x}\in p^{-1}(V)=\bigcup_{j\in J}V_j$ だから $\tilde{X}$ のある開集合 V_j が存在して $\tilde{x}\in V_j$ となる．$V_j\cap U$ は V_j の開部分集合であり，$p|V_j$ は V_j から V の上への同相写像であるから，$p(V_j\cap U)$ は V の開集合になる．一方，V は X の開集合であるから，$p(V_j\cap U)$ は X の開部分集合である．$x\in p(V_j\cap U)\subseteq p(U)$ であるから $p(U)$ は開集合になり，よって p は開写像になる．

p は連続な開写像であるから X の部分集合 V が開集合であるための必要十分条件は $p^{-1}(V)$ が開部分集合になることである．この事実から定理の後半が得られる．▌

前の章で被覆 $e:\boldsymbol{R}\to S^1$ に対して証明した多くの結果は他の被覆へも一般化される．$p:\tilde{X}\to X$ を被覆，$f:Y\to X$ を連続写像とする．このとき，連続写像 $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ で $p\tilde{f}=f$ をみたすものを $f:Y\to X$ の**持ち上げ** (lift) という．次の補題は，もし持ち上げが存在するならば，それは本質的に一意であることを示している．

17.4 補　題

$p:\tilde{X}\to X$ を被覆，$\tilde{f},\tilde{\tilde{f}}:Y\to\tilde{X}$ を $f:Y\to X$ の 2 つの持ち上げとする．Y が連結で，ある $y_0\in Y$ に対して $\tilde{f}(y_0)=\tilde{\tilde{f}}(y_0)$ のとき $\tilde{f}=\tilde{\tilde{f}}$ となる．

証明 $Y'=\{y\in Y\,;\,\tilde{f}(y)=\tilde{\tilde{f}}(y)\}$

と定義すると，仮定より $y_0\in Y'$ であるから Y' は空ではない．Y' が開かつ閉集合であることを示そう．$y\in Y$ とすると，p によって均等に覆われた $f(y)$ の開近傍 V が存在する．すなわち，$p^{-1}(V)$ は互いに素な $\{V_j\,;\,j\in J\}$ の和集合であり，各 $j\in J$ に対して $p|V_j\,;\,V_j\to V$ は同相写像になっている．$y\in Y'$ とすると，ある $k\in J$ に対して $\tilde{f}(y)=\tilde{\tilde{f}}(y)\in V_k$ かつ $\tilde{f}^{-1}(V_k)\cap\tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_k)$ は Y' に含まれる y の開近傍である．これを示すために，$x\in\tilde{f}^{-1}(V_k)\cap\tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_k)$ とすると，$\tilde{f}(x)$

$\in V_k$ かつ $\tilde{\tilde{f}}_k(x)\in V_k$ となり，一方 $p\tilde{f}(x)=p\tilde{\tilde{f}}(x)$ も成り立つ．$p|V_k$ は同相写像だから $\tilde{f}(x)=\tilde{\tilde{f}}(x)$ となる．このように，Y' の各点は Y' に含まれる開近傍をもつので Y' は開集合である．一方，$y\notin Y'$ のときある $k, l, k\neq l$ に対して $\tilde{f}(y)\in V_k$ かつ $\tilde{\tilde{f}}(y)\in V_l$ となる．したがって，(上と同じ議論によって) $\tilde{f}^{-1}(V_k)\cap\tilde{\tilde{f}}^{-1}(V_l)$ は Y' の補集合に含まれる y の開近傍となる．したがって，Y' は閉集合である．Y は連結であるから $Y=Y'$ となり，$\tilde{f}=\tilde{\tilde{f}}$ が成立する．▌

次は上の補題の奇妙な系である．

17.5 系

$\tilde{X}$ を道連結，$\varphi:\tilde{X}\to\tilde{X}$ を $p\cdot\varphi=p$ をみたす連続写像とする．ある $x_1\in\tilde{X}$ に対して $\varphi(x_1)=x_1$ のときすべての $x\in\tilde{X}$ について $\varphi(x)=x$ となる (すなわち φ は恒等写像である)．

証明 x を $\tilde{X}$ の任意の点とし $\alpha:I\to\tilde{X}$ を x_1 から x への道とする．$\varphi(x_1)=x_1$ であるから $\alpha, \varphi\alpha$ はともに x_1 を始点にもつ．さらに，$p\alpha=p\varphi\alpha$ であるから $\alpha, \varphi\alpha$ は道 $p\alpha:I\to X$ の持ち上げである．上の補題より $\alpha=\varphi\alpha$ となり，特に α と $\varphi\alpha$ の終点は一致する．すなわち，$\varphi(x)=x$ となる．▌

次の結果は**道のホモトピー持ち上げ定理** (homotopy path lifting theorem) という名で知られている．証明は定理 16.4 及び補題 16.5 と同じ方法で与えられる．

17.6 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ を被覆とする．

(i) 道 $f:I\to X$ と $p(a)=f(0)$ となる点 $a\in\tilde{X}$ が与えられているとき $p\tilde{f}=f$ と $\tilde{f}(0)=a$ をみたす唯一つの道 $\tilde{f}:I\to\tilde{X}$ が存在する．

(ii) 連続写像 $F:I\times I\to X$ と $p(a)=F(0,0)$ となる点 $a\in\tilde{X}$ が与えられているとき $p\tilde{F}=F$ および $\tilde{F}(0,0)=a$ をみたす唯一つの連続写像 $F:I\times I\to\tilde{X}$ が存在する．

系として**モノドロミー定理** (monodoromy theorem) が得られる．証明は系 16.6 と同様である．

17.7 系

f_0 および f_1 を X の同値な道と仮定する．もし $\tilde{f}_0(0)=\tilde{f}_1(0)$ ならば $\tilde{f}_0(1)=\tilde{f}_1(1)$ となる．

16章の結果の一般化の続きとして，次の定理が得られる．

17.8 定 理

$p:\tilde{X}\to X$ を $\tilde{X}$ が単連結であるような被覆写像とする．$a\in\tilde{X}$ に対して集合 $\pi(X,p(a))$ と $p^{-1}(p(a))$ との間に1対1対応が存在する．

証明 この証明は本質的に定理16.7の証明に含まれる．特徴的な点を指摘しておく．まず

$$\varphi:\pi(X,p(a))\to p^{-1}(p(a))$$

を次の式で定義する．

$$\varphi([f])=\tilde{f}(1)$$

ここで $\tilde{f}$ は $f(0)=a$ となる f の持ち上げである．これは系17.7より矛盾なく定義される．次に

$$\psi:p^{-1}(p(a))\to\pi(X,p(a))$$

を定義する．そのため，$x\in p^{-1}(p(a))$ とし a から x への道 f を考える．$\tilde{X}$ は単連結であるから，任意の2つの道は同値になる．よって，$[pf]$ は矛盾なく定義された $\pi(X,p(a))$ の元である．$\psi(x)=[pf]$ と定義する．$\varphi\psi=1$ および $\psi\varphi=1$ は容易に確かめられる．よって，φ および ψ は全単射である．∎

上の結果の原理から，$\pi(X,x_0)$ を計算するには，$\tilde{X}$ が単連結であるような被覆 $p:\tilde{X}\to X$ を見つけるべきであろう．それから，全単射 $\varphi:\pi(X,x_0)\to p^{-1}(x_0)$ が群の同型写像となるような $p^{-1}(x_0)$ 上の群構造を見つけることにする．これは，本質的には16章で行われたことである．一般的には，これを行うのは容易でない．いくつかの特別な場合は以後の章にでてくる（21章も参照せよ）．

17.9 練 習 問 題

(a) $p:\tilde{X}\to X$ を被覆写像とし，X_0 を X の部分集合とする．$\tilde{X}_0=p^{-1}(X_0)$ とおく．$p_0(x)=p(x)$ で定義される $p_0:\tilde{X}_0\to X_0$ は被覆写像であることを証明せよ．

(b) $\tilde{X}=\{(x, y)\in \boldsymbol{R}^2\ ;\ x$ または y は整数$\}$とする．$X=\{(z_1, z_2)\in S^1\times S^1\ ;\ z_1=1$ または $z_2=1\}$とし，$p:\tilde{X}\to X$ を $p(x, y)=(\exp(2\pi ix),\ \exp(2\pi i))$ で定義する．このとき，$p:\tilde{X}\to X$ が被覆写像であることを示せ．

(c) 次のうちのどれが被覆写像であるか？

(i) ある決められた整数 n に対し，$p(z)=z^n$ で与えられる写像 $p:\boldsymbol{C}^*\to\boldsymbol{C}^*$，但し，$\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$；

(ii) $\sin:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$；

(iii) 決められた整数 m, n と $U=\boldsymbol{C}^*-\{1\}$ に対して，$p(z)=(1-z)^m z^n$ で与えられる $p:U\to\boldsymbol{C}^*$．

(d) $p:\tilde{X}\to X$ および $q:\tilde{Y}\to Y$ を被覆写像とする．

(i) $p\times q:\tilde{X}\times\tilde{Y}\to X\times Y$ は被覆写像であることを証明せよ．

(ii) $X=Y$ のとき

$$\widetilde{W}=\{(\tilde{x}, \tilde{y})\in\tilde{X}\times\tilde{X}\ ;\ p(\tilde{x})=q(\tilde{y})\}$$

とおくと，$f(\tilde{x}, \tilde{y})=p(\tilde{x})$ で定義される $f:\widetilde{W}\to X$ は被覆写像である．

(iii) $p:\tilde{X}\to X,\ q:\tilde{Y}\to Y$ がともに $e:\boldsymbol{R}\to S^1$ のとき $\widetilde{W}$ と f を明確に求めよ．ここで，$e(t)=\exp(2\pi it)$．

(e) $a:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ および $b:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ を

$$az=z+i,$$

$$bz=\bar{z}+\frac{1}{2}+i$$

で定義される複素平面の同相写像とする．

$ba=a^{-1}b$ を示せ．また，これから

$G=\{a^m b^{2n} b^{\varepsilon}\ ;\ m\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z},\ \varepsilon=0$ または $1\}$

が $\boldsymbol{C}$ の同相写像の群であることを導け．さらに G の作用は真性不連続であり，軌道空間 $\boldsymbol{C}/G$ はハウスドルフであることを証明せよ．

(f) ((e)の続き) G の各軌道上の点を1点だけ含む‘半開矩形’を見つけよ．また，それにより $\boldsymbol{C}/G$ がクラインの壺になることを示せ．

(g) ((f)の続き) クラインの壺の $\boldsymbol{R}^4$ の中への埋め込み

$\varphi:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{R}^5$ を次の式で定義する．

$\varphi(x+iy)=(\cos(2\pi y), \cos(4\pi x), \sin(4\pi x), \sin(2\pi y)\cos(2\pi x), \sin(2\pi x)\cos(2\pi y))$.

φは群Gの各軌道を1点に写すことを示せ．また，これから$\boldsymbol{C}/G$がφの像と同相であることを導け．

$\psi(p, q, r, s, t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t)$

で定義される写像$\psi : \boldsymbol{R}^5 \to \boldsymbol{R}^4$の$\varphi$の像への制限は同相写像であることを示せ．

(h) $p : \tilde{X} \to X$を被覆写像，Xを道連結と仮定する．$p^{-1}(x)$の濃度は$x \in X$に依らないことを証明せよ．この数がnのとき，$p : \tilde{X} \to X$を**n重被覆**(*n*-fold covering)という．

(i) Kをクラインの壺とするとき，2重被覆$p : S^1 \times S^1 \to K$をみつけよ．

(j) 位相空間の部分集合$\sum$がS^1と同相のとき**単純閉曲線**(simple closed curve)という．$p : S^2 \to \boldsymbol{R}P^2$を球面から射影空間への標準的な射影とする．$\sum$を$\boldsymbol{R}P^2$の中の単純閉曲線とするとき，$p^{-1}(\sum)$は$S^2$の中の単純閉曲線であるか，または2つの互いに素な単純閉曲線の和集合になることを証明せよ(ヒント：$\sum$を$\boldsymbol{R}P^2$の中の閉道の像として考えよ)．

(k) $\pi(S^1 \times S^1, (1, 1))$をこの章の結果を使って直接計算せよ(ヒント：上の(d)と(i)を使って被覆写像$\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{R} \to S^1 \times S^1$が得られる．ここで定理17.8を利用せよ)．

(l) $n \geq 2$に対してS^nが単連結であると仮定したとき(練習問題15.6(c))，$\boldsymbol{R}P^n (n \geq 2)$の基本群は位数2の巡回群であることを示せ．さらに$p$が素数のときレンズ空間$L(p, q)$の基本群は位数$p$の巡回群であることを示せ．

(m) $S^1 \times Y$が$\boldsymbol{R}P^2$またはS^2に同相になるような位相空間Yが存在するか．

(n) $p : X \to Y$を被覆写像としX, Yはいずれもハウスドルフ空間と仮定する．このとき，Xがn-多様体であるための必要十分条件はYがn-多様体であることを証明せよ．

(o) $p : \tilde{X} \to X$を被覆としYを位相空間とする．$f : Y \to X$は持ち上げ$\tilde{f} : Y \to \tilde{X}$をもつと仮定する．$F(y, 0) = f(y) (y \in Y)$となる任意のホモトピー$F : Y \times I \to X$は$\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y) (y \in Y)$となるホモトピー$\tilde{F} : Y \times I \to \tilde{X}$に持ち上げられることを証明せよ．

(p) $p : \tilde{X} \to X$を被覆とし，$f, g : Y \to \tilde{X}$を$pf = pg$をみたす2つの連続写像

とする．f と g が一致するような Y の点の集合は Y の開かつ閉部分集合であることを証明せよ．

(q) $p:\tilde{X}\to X$ を X が局所道連結であるような被覆とする(練習問題 12.10 (j) 参照)．このとき，$\tilde{X}$ もまた局所道連結であることを証明せよ．

(r) $p:\tilde{X}\to X$ を被覆とするとき，$ph=p$ をみたす同相写像 $h:\tilde{X}\to\tilde{X}$ を p の**被覆変換** (covering translation) という．被覆変換の全体の集合は群になることを証明せよ．

(s) $p:\tilde{X}\to X$ を被覆とし，$\tilde{X}$ を連結かつ局所道連結とする．$p:\tilde{X}\to X$ の被覆変換の群は $\tilde{X}$ に真性不連続に作用することを証明せよ．

18

被覆空間の基本群

この章では，$p:\tilde{X}\to X$ を被覆とし $p(\tilde{x}_0)=x_0$ とするとき $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ およびそれと $\pi(X,x_0)$ との関係を考える．結果の多くは練習問題にする．

最初の定理は，定理 17.6 から直接得られる．

18.1 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ が $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $x_0\in X$ に対して $p(\tilde{x}_0)=x_0$ となる被覆のとき，誘導準同型

$$p_*:\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi(X,x_0)$$

は単射準同型である．

基点を変えたときどうなるかというのは自然な問題である．次の定理はそれに答える．

18.2 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ を $\tilde{X}$ が道連結である被覆とする．$\tilde{x}_0,\tilde{x}_1\in\tilde{X}$ に対し，$p(\tilde{x}_0)$ から $p(\tilde{x}_1)$ への X の中の道 f で

$$u_f p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)=p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$$

をみたすものが存在する．

証明　g を $\tilde{x}_0$ から $\tilde{x}_1$ への $\tilde{X}$ の中の道とする．道 g は $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ から $\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$ への同型写像 u_g を定義する．準同型 p_* を作用させると

$$p_*u_g\pi(\tilde{X},\tilde{x})=p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)$$

となる．しかるに，一方，$p_*u_g=u_{pg}p_*$ である(容易に確かめられる．練習問

題 15.11(c) 参照) から，$f=pg$ は要求された条件をみたしている．▌

上の定理において $p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)=x_0$ とすると道 f は $\pi(X, x_0)$ の元$[f]$を決め，次が成り立つ．

$$p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [f]^{-1}(p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))[f]$$

言い換えれば，部分群 $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ と $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ は $\pi(X, x_0)$ の共役な部分群である．実際にはさらに次のことがいえる．

18.3 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ を $\tilde{X}$ が道連結である被覆とする．$x_0\in X$ に対して集まり

$$\{p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)\ ;\ \tilde{x}_0\in p^{-1}(x_0)\}$$

は $\pi(X, x_0)$ の中の共役類になる．

証明　この集まりの中の任意の 2 つの部分群が共役になることはすでに示した．それ故，今度は H が $\pi(X, x_0)$ の部分群で $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0), x_0\in p^{-1}(x_0)$ の 1 つの共役であると仮定する．つまり，ある $\alpha\in\pi(X, x_0)$ に対して

$$H = \alpha^{-1}(p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0))\alpha$$

とする．$\alpha=[f]$ とし，$\tilde{f}$ を $\tilde{x}_0$ を始点とする f の持ち上げとする．このとき

$$p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{f}(1)) = u_f p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$$

となり，H は上の集まりに含まれる．▌

その他の $\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$ と $\pi(X, x_0)$ の間の関係は練習問題として与えることにする．

18.4 練 習 問 題

これらの練習問題を通して，$p:\tilde{X}\to X$ は $\tilde{X}$ が道連結である被覆であるとし，$x_0\in X$ とする．

(a)　$\tilde{x}\in p^{-1}(x_0)$ と $[f]\in\pi(X, x_0)$ に対して $\tilde{x}\cdot[f]$ を

$$\tilde{x}\cdot[f] = \tilde{f}(1)$$

で定義する．ここで，$\tilde{f}$ は $\tilde{x}$ を始点とする f の唯一つの持ち上げとする．これが群 $\pi(X, x_0)$ の集合 $p^{-1}(x_0)$ への右側作用を定義していることを証明せよ (ヒント：定理 16.7 の証明を見よ．a を始点とする f の持ち上げに対して $l_a(f)$ の記号を使用せよ)．

(b)　すべての $a, b\in S$ に対して元 $g\in G$ が存在して $g\cdot a=b$ となるとき，群 G

は集合 S に推移的に(transitively)作用するという．言い換えれば，$S=G\cdot a$($=a\in S$ に対する軌道)ということである．$\pi(X,x_0)$ は $p^{-1}(x_0)$ に推移的に作用していることを証明せよ．

(c) $p^{-1}(x_0)$ と $\pi(X,x_0)$ における $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ の右剰余類の集合との間に $\pi(X,x_0)$-同変全単射が存在することを証明せよ(ヒント：練習問題5.9(d)における'左'を'右'におきかえ，$p^{-1}(x_0)$ への $\pi(X,x_0)$ の作用の安定群(つまり，$p^{-1}(x_0)$ をそれ自身にうつす元の全体)が，$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ であることを示せ)．

(d) 上の(c)から，$\tilde{X}$ が単連結のとき $p^{-1}(x_0)$ と $\pi(X,x_0)$ の間に $\pi(X,x_0)$-同変全単射が存在することを証明せよ．

(e) $p:\tilde{X}\to X$ が n-重被覆(すなわち，$p^{-1}(x_0)$ が n 個の点からなる)のとき

$$p_*:\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)\to\pi(X,x_0)$$

の像は指数 n の部分群である．

(f) X の基本群が $\boldsymbol{Z}$ であり $p^{-1}(x_0)$ が有限と仮定する．このとき，$\tilde{X}$ の基本群を求めよ．

(g) X が単連結のとき，p は同相写像であることを証明せよ．

(h) $\tilde{X}=X$ と仮定する．X の基本群が有限のとき p は同相写像であることを証明せよ．X の基本群が有限でないときでも，p は必ず同相写像になるか？

(i) ある $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$ に対して群 $p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ が $\pi(X,x_0)$ の正規部分群のとき，被覆は正則(regular)であるという．このとき，f を X の閉道とすると，f の持ち上げはすべて閉じているか，1つも閉じてないかのいずれかが起こることを証明せよ．

(j) $p:\tilde{X}\to X$ を G の $\tilde{X}$ への真性不連続な作用によって得られた被覆とする(すなわち，$X=\tilde{X}/G$)．このとき，$p:\tilde{X}\to X$ は正則であることを示せ．

(k) p が同相写像であるための必要十分条件は

$$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)=\pi(X,x_0)$$

であることを証明せよ．

19

軌道空間の基本群

この章を通して，X は道連結とし G が X に真性不連続に作用していると仮定する．したがって，$p: X \to X/G$ は被覆である．この章の目標は，G と軌道空間 X/G の基本群との関係を見つけることにある．

$x_0 \in X$ および $y_0 = p(x_0) \in X/G$ とする．このとき

$$p^{-1}(x_0) = \{g \cdot x_0 \,;\, g \in G\}$$

に注意せよ．$[f] \in \pi(X/G, y_0)$ とするとき，$x_0 \in X$ を始点とする f の唯一の持ち上げ $\tilde{f}$ が存在する．$\tilde{f}(1) \in p^{-1}(y_0)$ であるから，$\tilde{f}(1) = g_f \cdot x_0$ となる唯一つの元 $g_f \in G$ が存在する．それ故，対応 $f \to g_f$ は写像

$$\varphi: \pi(X/G, x_0) \to G$$

を定義する．

19.1 定　理

写像 $\varphi: \pi(X/G, x_0) \to G$ は群の準同型写像である．

証明　f, f' を y_0 を基点とする X/G の中の閉道とする．$\tilde{f}$ を x_0 を始点とする f の唯一つの持ち上げ，$l_a(f)$ を $a = \tilde{f}(1)$ を始点とする f' の唯一つの持ち上げとする．$\widetilde{f*f'}$ を $x_0 \in X$ を始点とする $f*f'$ の唯一つの持ち上げとするとき，

$$\widetilde{f*f'} = \tilde{f} * l_a(f')$$

が成り立つ．なぜなら，$\tilde{f} * l_a(f')$ も $x_0 \in X$ を始点とする $f*f'$ の 1 つの持ち上げになっているからである．$\tilde{f}'$ を x_0 を始点とする f' の唯一つの持ち上げとする．$g_f \cdot \tilde{f}'$ は，$g_f \cdot x_0$ を始点とする f' の 1 つの持ち上げであり $a = \tilde{f}(1) = g_f \cdot x_0$ であるから，$l_a(f') = g_f \cdot \tilde{f}'$ となる．したがって次が成立する．

$$\widetilde{f*f'}(1) = g_f \cdot \hat{f}'(1)$$
$$= g_f \cdot (g_{f'} \cdot x_0)$$
$$= (g_f \cdot g_{f'}) \cdot x_0$$

これにより，$\varphi([f][f'])=(\varphi[f])(\varphi[f'])$ となり，φ は準同型である．▌

準同型 φ の核は次のようになる．

19.2　補　　題

$\varphi : \pi(X/G, x_0) \to G$ の核は部分群 $p_*\pi(X, x_0)$ である．

証明　φ の核は $\varphi[f]=1$ となる元 $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ の集合である．それは $\hat{f}(1)=x_0$ となるような元 $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ の集合である．すなわち，$\hat{f}$ は $x_0 \in X$ を基点とする X の中の閉道である．したがって，$[\hat{f}] \in \pi(X, x_0)$ に対して $[p\hat{f}]=[f]$ となるような $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ の集合（すなわち，$p_*\pi(X, x_0)$）である．▌

特に $p_*\pi(X, x_0)$ が $\pi(X/G, y_0)$ の正規部分群のときは剰余群

$$\pi(X/G, y_0)/p_*\pi(X, x_0)$$

が定義される．

19.3　定　　理

群 $\pi(X/G, y_0)/p_*\pi(X, x_0)$ と G は同型である．

証明　準同型写像

$$\varphi : \pi(X/G, y_0) \to G$$

が全射であることを示せばよい．$g \in G$ のとき f_g を x_0 から $g \cdot x_0$ への X の中の道とする．この道は元 $[pf_g] \in \pi(X/G, y_0)$ を決める．$\widetilde{pf_g}$ を x_0 を始点とする pf_g の唯一つの持ち上げとすると，定義より $\varphi[pf_g] \cdot x_0 = \widetilde{pf_g}(1)$，しかるに，$f_g = \widetilde{pf_g}$ であるから $f_g(1)=g \cdot x_0$．したがって，$\varphi[pf_g]=g$ となり φ は全射である．

19.4　系

X が単連結のとき $\pi(X/G, y_0) \cong G$．

この系から 16 章の結果が計算できる．すなわち円周の基本群は $\boldsymbol{Z}$ である．これは S^1 が $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ に同相であることよりわかる．同様にして $(S^1)^n \cong \boldsymbol{R}^n/\boldsymbol{Z}^n$ の

基本群は $\boldsymbol{Z}^n$ に同型であることを示すことができる．他の例は今までの練習問題を踏まえた上で次の練習問題の中で与えられている．

19.5 練習問題

(a) レンズ空間 $L(p, q)$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_p$ に同型であることを示せ(練習問題 15.6(c) より S^3 は単連結であることを仮定せよ)．

(b) 任意の有限生成可換群 G に対して基本群が G になる位相空間 X_G が存在することを示せ(G はいくつかの $\boldsymbol{Z}$ といくつかの巡回群の直積であるという事実を仮定せよ)．

(c) $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{C}-\{0\}$ とおき，K を $\varphi(z)=4z$ としたときの同相写像 $\{\varphi^n\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$ の群とするとき，$Y=\boldsymbol{C}^*/K$ とおく．系 19.4 を使って Y の基本群が $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ であることを証明せよ(ヒント：位相空間 X, 群 G 及び G の正規部分群 H で，X が単連結な G–空間であり，$X/H\cong\boldsymbol{C}^*$ 及び $G/H=K$ をみたすものを見つけよ．それから練習問題 5.13(c) を適用せよ)．

(d) $X=\boldsymbol{R}\times[0, 1]\subset\boldsymbol{C}$ とするとき，$Tz=\bar{z}+1+i$ が同相写像 $T: X\to X$ を定義することを示せ．G を T によって生成される同相写像の群とするとき，X/G はメービウスの帯であることを示せ．これからメービウスの帯の基本群が $\boldsymbol{Z}$ であることを導け．

(e) クラインの壺の基本群は

$$G=\{a^m b^{2n+\varepsilon}\ ;\ m\in\boldsymbol{Z},\ n\in\boldsymbol{Z},\ \varepsilon=0 \text{ または } 1,\ ba=a^{-1}b\}$$

であることを証明せよ．すなわち，G は 2 つの生成元 a, b と 1 つの関係 $ba=a^{-1}b$ をもつ群である．

(f) X が真性不連続 G–作用をもつと仮定する．練習問題 18.4(a) より $\pi(X/G, y_0)$ は $p^{-1}(y_0)$ に(右側から)作用している．このとき $g\in G, x\in p^{-1}(y_0)$ および $[f]\in\pi(X/G, y_0)$ に対して

$$(g\cdot x)\cdot[f]=g\cdot(x\cdot[f])$$

を証明せよ．

(g) G, H を，G は左側から，H は右側から，S に作用している群とする．またすべての $g\in G,\ x\in S,\ h\in H$ に対して

$$(g\cdot x)\cdot h=g\cdot(x\cdot[f])$$

が成り立つと仮定する．もし G が自由にかつ推移的に S に作用しているなら，準同型

$$\varphi : H \to G$$

が存在することを示せ．さらに φ の核は H の点 $x_0 \in S$ の固定群であることを示せ．ここで $S=\{g\cdot x_0; g\in G\}$（ヒント：$h\in H$ に対する $\varphi(h)$ を $g\cdot x_0 = x_0\cdot h$ となる唯一つの G の元 g で定義する）．

(h)　上の(f)と(g)を使って定理 19.1 および補題 19.2 の別証明を与えよ．

(i)　上の(h)と練習問題 18.4(c)を使って定理 19.3 の別証明を与えよ．

20

ボルスク－ウーラムの定理と
ハム・サンドウィッチの定理

この章では，以前の章の結果のいくつかの応用を与える．それらは10章の結果の一般化であって，全て，ボルスク-ウーラム(**Borsuk-Ulam**)の定理(S. ウーラムによって予想され，1930年代の初めにK. ウーラムによって示された)に基づいている．

20.1 定　理

連続写像 $\varphi: S^2 \to S^1$ で $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ をみたすものは存在しない．

これは連続写像 $\varphi: S^1 \to S^0$ で $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ となるものは存在しない(何故なら，そのような写像は全射となるが，S^1 は連結であって S^0 は連結でないから矛盾する)という事実の一般化である．実際はもっと一般的な結果がある．すなわち．$n \geq 1$ に対して連続写像 $\varphi: S^n \to S^{n-1}$ で $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ となるものは存在しない．$n \geq 2$ については証明がこの本の範囲を越え，例えば高次元ホモトピー群についての事実が必要である．

証明　定理 20.1 を証明するために，連続写像 $\varphi: S^2 \to S^1$ で $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ となるものが存在すると仮定する．群 $\boldsymbol{Z}_2 = \{\pm 1\}$ が S^2 および S^1 上に直径対点を対応させるように作用する(すなわち，$(\pm 1) \cdot x = \pm x$)．この作用はどちらも真性不連続である．$p_2: S^2 \to S^2/\boldsymbol{Z}_2$ および $p_1: S^1 \to S^1/\boldsymbol{Z}_2$ を標準射影すると，φ は連続写像 $\phi: S^2/\boldsymbol{Z}_2 \to S^1/\boldsymbol{Z}_2$ で $p_1\varphi = \phi p_2$ となるものを誘導する．すなわち，$\phi(\{\pm x\}) = \{\pm \phi(x)\}$ である．定理 5.5 の証明参照．$a = (1. 0. 0) \in S^3$ とする，但し，いつものように

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 \,;\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

である．また，$b=p_2(a)\in S^2/\boldsymbol{Z}_2$ とする．f を S^2 の a から a への道で

$$f(t)=(\cos(\pi t),\sin(\pi t),0)\qquad 0\leq t\leq 1$$

で与えられるものとすると，p_2f は $S^2/\boldsymbol{Z}_2$ の b を基点とする閉道となる．このとき，基本群の元 $[p_2f]\in\pi(S^2/\boldsymbol{Z}_2,b)$ は $[p_2f]^2=[\varepsilon_b]$ をみたすことを示そう．

$$\begin{aligned}(p_2f*p_2f)(t)&=\begin{cases}p_2(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t),0) & 0\leq t\leq \dfrac{1}{2}\\ p_2(\cos(\pi(2t-1)),\sin(\pi(2t-1)),0) & \dfrac{1}{2}\leq t\leq 1\end{cases}\\ &=p_2(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t),0)\qquad 0\leq t\leq 1\end{aligned}$$

であるから，$F:I\times I\to S^2$ を

$$F(t,s)=(s+(1-s)\cos(2\pi t),(1-s)\sin(2\pi t,\sqrt{2s(1-s)(1-\cos(2\pi t))})$$

によって定めれば，$p_2F:I\times I\to S^2/\boldsymbol{Z}_2$ は次をみたす連続写像である．

$$p_2F(t,0)=(p_2f*p_2f)(t)$$
$$p_2F(t,1)=p_2(1,0,0)=\varepsilon_b(t)$$
$$p_2F(0,s)=p_2(1,0,0)=p_2F(1,s)$$

これは，$[p_2f]^2=[\varepsilon_b]\in\pi(S^2/\boldsymbol{Z}_2,b)$ であることを示す．

写像 $\phi:S^2/\boldsymbol{Z}_2\to S^1/\boldsymbol{Z}_2$ は準同型

$$\phi_*:\pi(S^2/\boldsymbol{Z}_2,b)\to\pi(S^1/\boldsymbol{Z}_2,\phi(b))$$

を誘導し，

$$[\phi p_2f]^2=[\varepsilon_{\phi(b)}]\in\pi(S^1/\boldsymbol{Z}_2,\phi(b))$$

をみたす．勿論，$S^1/\boldsymbol{Z}_2\cong S^1$ であって，ある $\alpha\in\pi(S^1/\boldsymbol{Z}_2,\phi(b))$ に対して

$$\pi(S^1/\boldsymbol{Z}_2,\phi(b))=\{\alpha^n\ ;\ n\in\boldsymbol{Z}\}$$

となる(実際，$g(t)=\exp(\pi it)\in S^1\subset\boldsymbol{C}$ によって定まる $g:I\to S^1$ について $\alpha=[p_2g]$ である)．従って，$[\phi p_2f]^2=[\varepsilon\phi_{(b)}]$ であることにより $[\phi p_2f]=[\varepsilon_{\phi(b)}]$ となる(ある整数 k が存在して $[\phi p_2f]=\alpha^k$ とかけるが $\alpha^{2k}=\alpha^0$ は $\alpha^k=\alpha^0$ を意味する)．

注意：練習問題 15.16(c)により S^2 は単連結(系 23.9 も参照)であり，従って，前章より，$S^2/\boldsymbol{Z}_2$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_2$ である．よって，ϕ_* は $\boldsymbol{Z}_2$ から $\boldsymbol{Z}$ への準同型写像となるが，そのような準同型はすべて自明であり，$[\phi p_2f]=[\varepsilon_{\phi(b)}]\subset\pi(S^1/\boldsymbol{Z}_2,\phi(b))$ となる．上の議論は，練習問題の結果や，後で証明される結果を用いるのを避けるために与えた．

定理 20.1 の証明を続ける．17 章の結果に注意して，$\varphi(a)$ を始点とする，$\psi p_2 f$ と $\varepsilon_{\psi(b)}$ の S^1 への一意的に定まる持ち上げを考えるとそれぞれ φf と $\varepsilon_{\psi(a)}$ となる（$\psi p_2 = p_1 \varphi$ であることに注意する）．ところが，$\varepsilon_{\varphi(a)}(1)=\varphi(a)$ であるのに，$\varphi f(1)=\varphi(-a)=-\varphi(a)$ となるが，これは $[\psi p_2 f]=[\varepsilon_{\psi(b)}]$ であることに矛盾する．従って，φ は存在しない（$[p_2 f]\neq[\varepsilon_b]\in\pi(S^2/\boldsymbol{Z}_2, b)$ であることに注意する）．

20.2　系

$f: S^2\to\boldsymbol{R}^2$ を連続写像で，すべての $x\in S^2$ に対して $f(-x)=-f(x)$ となるものとする．このとき，$f(x)=0$ となるような点 $x\in S^2$ が存在する．

証明　すべての $x\in S^2$ に対して，$f(x)\neq 0$ と仮定する．$g: S^2\to S^1$ を $g(x)=f(x)/\|f(x)\|$ によって定義すると，g は連続であって $g(-x)=-g(x)$ となり，定理 20.1 に矛盾する．

20.3　系

$f: S^2\to\boldsymbol{R}^2$ を連続写像とする．このとき，$f(x)=f(-x)$ となるような点 $x\in S^2$ が存在する．

証明　すべての $x\in S^2$ に対して $f(x)\neq f(-x)$ であるとすると，$g: S^2\to\boldsymbol{R}^2$ を $g(x)=f(x)-f(-x)$ で定義すれば g は連続で全ての $x\in S^2$ に対して $g(-x)=-g(x)$ かつ $g(x)\neq 0$ となる．これは系 20.2 に矛盾する．∎

系 20.3 は系 10.3 の一般化である．上の 2 つの結果は $S^2, \boldsymbol{R}^2$ を $S^n, \boldsymbol{R}^n$ に置き換えても成立する．

系 20.3 により，特に，S^2 から $\boldsymbol{R}^2$ への連続単射が存在しないことがわかる．このことより直ちに次の結果を得る．

20.4　系

$\boldsymbol{R}^2$ のどんな部分集合も S^2 と同相でない．

10 章と同様に物理的解釈を与える．

20.5　系

いついかなる時でも，地球の表面上の直径対点の対で同温，同圧であるものが存在する．

第1パン・ケーキ問題の類似としてハム・サンドウィッチ定理を得る．パンとバターとハム(材料は本当は本質的でないのだが)を3層に積み重ねたサンドウィッチをナイフにより1切りで正確に各層を等分できるということをこの定理は主張する．正確には次のようになる．

20.6　定　　理

A, B, C を $\boldsymbol{R}^3$ の有界な部分集合とする．このとき，それぞれの体積を等分するような $\boldsymbol{R}^3$ の平面が存在する．

証明　証明は定理10.5の証明と全く同様である．A, B, C は $\boldsymbol{R}^3$ 内の中心0，直径1の球面 S の中に含まれていると仮定できる．$x \in S$ に対して x を通る S の直径を D_x とする．$t \in I$ に対して D_x と直交して x から距離 t だけ離れた D_x 上の点を横切る平面を p_t とする．いま p_t は A を2つの部分 A_1, A_2 に分ける．A_1 の方が A_2 より x に近いとする．写像 f_1, f_2 を

$$f_1(t) = \text{volume}(A_1),\ f_2(t) = \text{volume}(A_2)$$

によって定める．明らかに f_1, f_2 は I から $\boldsymbol{R}$ への連続写像であって，f_1 は単調増加，f_2 は単調減少である．従って，写像 $f : I \to \boldsymbol{R}$ を $f(t)=f_1(t)-f_2(t)$ によって定義すれば中間値の定理により，$f(t)=0$ となる $t \in I$ が存在する．f は単調増加だから唯一の点 a で0になるか，閉区間 $[a, b]$ でのみ0になる．前者の場合，その点 a を $\alpha(x)$ と書き，後者の場合 $(a+b)/2$ を $\alpha(x)$ と書く．結局，$P_{\alpha(x)}$ は A を2つの等しい部分に分ける．$\alpha : S \to \boldsymbol{R}$ は連続写像であって $\alpha(x) = 1-\alpha(x)$ をみたすことに注意する．

同様の考察で連続写像 $\beta, \gamma : S \to \boldsymbol{R}$ で $\beta(x)=1-\beta(-x)$, $\gamma(x)=1-\gamma(-x)$ をみたし，$P_{\beta(x)}, P_{\gamma(x)}$ がそれぞれ B, C を等分するようなものを定義することができる．これらの写像 α, β, γ を用いて $\varphi : S \to \boldsymbol{R}^2$ を

$$\varphi(x) = (\alpha(x)-\beta(x),\ \alpha(x)-\gamma(x))$$

によって定める．α, β, γ が連続だから，φ も連続である．さらに $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ であるから，系20.2より，$\varphi(y)=0$ となる点 $y \in S$ が存在する．ところが，

これは$\alpha(y)=\beta(y)=\gamma(y)$であることを意味し，結局$P_{\alpha(y)}$は$A, B, C$のそれぞれの体積を等分する．

20.7 練習問題

(a) $n\geq 2$のとき，連続写像$\varphi: S^n \to S^1$で$\varphi(-x)=-\varphi(x)$となるものは存在しないことを証明せよ．

(b) 群$\boldsymbol{Z}_p$が$S^3\subset \boldsymbol{C}^2$および$S^1\subset \boldsymbol{C}$に次のように作用するとする：

$$k\cdot(z_1, z_2) = ((\exp(2\pi ik/p))z_1,\ (\exp(2\pi ikq/p))z_2),$$

$$k\cdot z = (\exp(2\pi ik/p))z$$

但し，$k\in \boldsymbol{Z}_p=\{0, 1, \cdots, p-1\}$かつ$q$は$p$と互いに素な整数とする．このとき，$S^3$から$S^1$への$\boldsymbol{Z}_p$-同変連続写像は存在しないことを証明せよ．

(c) $\boldsymbol{R}^3$における第2パン・ケーキ問題の類似が成立するか？

(d) X, YをGが真性不連続に作用するG-空間とする．また，$\varphi: X\to Y$をG-同変連続写像とする．φの誘導する写像を$\phi: X/G\to Y/G$とかく．このとき準同型$\phi_*: \pi(X/G, p(x_0))\to \pi(Y/G, q\varphi(x_0))$は準同型

$$\pi(X/G, p(x_0))/p_*\pi(X, x_0) \to \pi(Y/G, q\varphi(x_0)/q_*\pi(Y, \varphi(x_0))$$

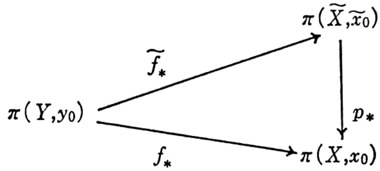
を誘導し，さらにこれは同型であることを示せ．但し$p: X\to X/G$および$q: Y\to Y/G$は標準射影とする．

(e) (d)を用いて，ボルスク-ウーラムの定理を証明せよ．また(b)を示せ(どちらも1行の証明である)．

21

再び被覆空間について：持ち上げ定理

$p:\tilde{X}\to X$ を被覆とし，$f: Y\to X$ は連続写像で，Y は連結であるとする．17章で，$f: Y\to X$ の持ち上げ $\tilde{f}$ が存在すればそれは(本質的に)一意であることを示したのを想起しよう．ところで，持ち上げ $\tilde{f}$ が存在すれば，次の可換図式を得る．



準同型 p_* は単射であり(定理 18.1)，また $p_*\tilde{f}_*=f_*$ だから

$$f_*\pi(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\pi(Y, y_0) \subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

となる．従って，持ち上げ $\tilde{f}$ が存在するための代数的な必要条件は $f_*\pi(Y, y_0)\subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ である．Y に，もう少し条件をつければこれは十分条件となることがわかる．従って，純粋に位相的な問題が，純粋に代数的な問題と同値になる．Y がみたすべき条件は，連結性および局所道連結性である．空間 Y が**局所道連結** (locally path connected) であるとは，全ての $y\in Y$ に対して勝手な y の開近傍が y の道連結開近傍を含むときをいう．練習問題 12. 10 (j) を参照せよ．連結で，かつ，局所道連結な空間は道連結である．これを次に示す．

21.1 補　　題

Y が連結で局所道連結ならば道連結である．

証明　y を Y の点とし，U を Y の道で y と結べる点から成る Y の部分集合とする．$u\in U$ ならば u は道連結開近傍 V を持つ(何故なら，Y は u の開近傍であり，Y は局所道連結だから)．$v\in V$ ならば u から v への V の道が存在し，

また y から u への Y の道が存在するから，結局 y から v への Y の道が存在する．よって $V\subset U$．これは，U が開集合であることを示す．同様にして，Y-U が開集合であることが示せる．従って，U は開かつ閉である．$y\in U$ だから U は空集合でない．ところが，Y は連結だから U は Y 自身でなくてはならない．これは，Y が道連結であることを意味する．

21.2 定　理

$p:\tilde{X}\to X$ を被覆，Y を連結かつ局所道連結な位相空間とし，$y_0\in Y$, $\tilde{x}_0\in\tilde{X}$, $p(\tilde{x}_0)=x_0$ とする．連続写像 $f:Y\to X$ で $f(y_0)=x_0$ となるものが与えられたとき，持ち上げ $\tilde{f}:Y\to\tilde{X}$ で $\tilde{f}(y_0)=\tilde{x}_0$ となるものが存在する必要十分条件は，$f_*\pi(Y,y_0)\subseteq p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ となることである．

証明　既に，条件が必要であることは示した．よって，十分であることを示せばよい．従って，$f_*\pi(Y,y_0)\subseteq p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ と仮定して，持ち上げ $\tilde{f}$ が存在することを示す．$\tilde{f}$ の定義は以下の通り，$y\in Y$ をとり，$\varphi:I\to Y$ を y_0 から y への Y の道とする．$f\varphi$ は x_0 から $f(y)$ への X の道となる．道のホモトピー持ち上げ定理(定理 17.6(a))により，一意的に定まる道 $\widetilde{f\varphi}:I\to X$ で $\widetilde{f\varphi}(0)=x_0$ および $p\widetilde{f\varphi}=f\varphi$ となるものが存在する．$\widetilde{f\varphi}(1)$ を $\tilde{f}(y)$ と定める．図 21.1 参照．

驚くべきことに，この定め方によって，$\tilde{f}$ は矛盾なく定義され連続となる．先ず $\tilde{f}$ が矛盾なく定義されることを示す．y_0 から y への道 φ のとり方にのみ選択の余地があったから，ϕ を y_0 から y への Y のもう 1 つの道とする．道の

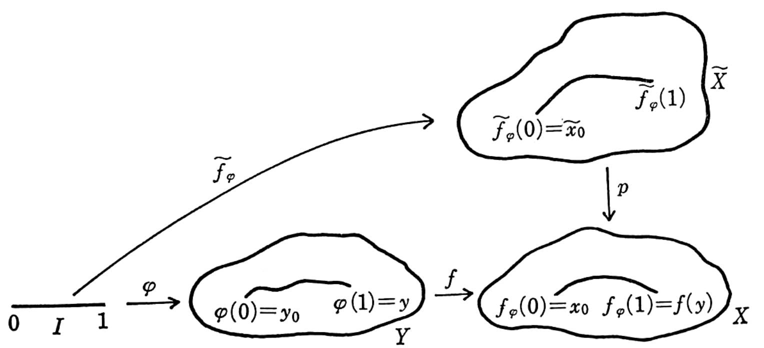


図 21.1

積 $\varphi*\bar{\psi}$ は y_0 を基点とする Y の閉道である．すると

$$f_*[\varphi*\bar{\psi}]=[f\varphi*f\bar{\psi}]\in f_*\pi(Y,y_0)$$

しかし，$f_*\pi(Y,y_0)\subseteq p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ であり，よって，$\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ の閉道 α で，$[f\varphi*f\psi]=[p\alpha]$ となるものが存在する．14章の結果を用いて

$$\begin{aligned}f\varphi &\sim f\varphi*\varepsilon_{x_0}\\ &\sim f\varphi*(f\bar{\psi}*f\psi)\\ &\sim (f\varphi*f\bar{\psi})*f\psi\\ &\sim p\alpha*f\psi\end{aligned}$$

を得る．道 α は閉じているから

$$\widetilde{p\alpha*f\varphi}=\alpha*\widetilde{f\psi}$$

であり，モノドロミー定理(定理17.7)により，

$$\widetilde{f\varphi}(1)=\widetilde{p\alpha*f\psi}(1)=(\alpha*\widetilde{f\psi})(1)=\widetilde{f\psi}(1)$$

となり，これは $\tilde{f}(y)$ が矛盾なく定まることを示している．$\tilde{f}$ を定義するためには，Y が道連結であることだけが必要であることに注意しておく．

$\tilde{f}$ が連続であることを示すために，Y に局所道連結という新たな仮定が必要である．U を $\tilde{X}$ の開集合とする．$y\in\tilde{f}^{-1}(U)$ をとると，U は $\tilde{f}(y)$ の開近傍である．U' を $U'\subseteq p(U)$ であるような $p\tilde{f}(y)=f(y)$ の均等被覆近傍とする．定義より，U' と同相な V_j によって $p^{-1}(U')=\bigcup_{j\in J}V_j$ となり或る k が存在して，$\tilde{f}(y)\in V_k$ となる．V_k と U は $\tilde{f}(y)$ の開近傍であるから，$W=V_k\cap U$ もそうである．U' が均等被覆であって $p(W)\subseteq U'$ だから，$p(W)$ も均等被覆であることに注意する．写像 f は連続だから $f^{-1}(p(W))$ は Y の開集合であって，y の開近傍である．Y は局所道連結だから，y の道連結開近傍 V で $V\subseteq f^{-1}(p(W))$ となるものが存在する．$\tilde{f}(V)\subseteq U$ であることを示す．$\tilde{f}(y)\in U$ は当然である．y' を V の他の点とすると，y から y' への V の道 φ が存在する．$\tilde{f}$ の定義より，$f\varphi$ の $\tilde{f}(y)$ を始点とする一意的に定まる持ち上げを $\widetilde{f\varphi}$ とするとき $\tilde{f}(y')$ は $\widetilde{f\varphi}(1)$ となる(ψ を y_0 から y への道とするとき $\psi*\varphi$ は y_0 から y' への道であり，道のホモトピー持ち上げ定理により，$\widetilde{f(\psi*\varphi)}(1)=\widetilde{f\varphi}(1)$ である)．道 $f\varphi$ はその像が $f(V)\subseteq p(W)$ の中に入るから，道 $\widetilde{f\varphi}$ はその像が $p^{-1}(p(W))$ の中に入る．ところが互いに交わらない，それぞれ $p(W)$ に同相な W_j によって，$p^{-1}(p(W))=\bigcup_{j\in J}W_j$ となる．従って，W_j のうちの一つ W_k が W 自身である．$\widetilde{f\varphi}(0)=\tilde{f}(y)\in$

W であるから，$\widetilde{f\varphi}(1)=\tilde{f}(y')\in W$ となる．これは $\tilde{f}(V)\subseteq W\subseteq U$ であることを示し，よって $V\subseteq\tilde{f}^{-1}(U)$ である．従って，$\tilde{f}^{-1}(U)$ の任意の点は $\tilde{f}^{-1}(U)$ での開近傍を持つから $\tilde{f}^{-1}(U)$ は開集合であり，よって $\tilde{f}$ は連続である． ▌

$\tilde{f}$ を定義するためには，単に Y が道連結でありさえすればよかったことを再び注意しておく．$\tilde{f}$ の連続性のために Y の局所道連結性が必要なのである．そこで，Y が道連結であるが，局所道連結でないとき，$\tilde{f}$ が連続でなくなる例を与えよう．Y を次のような $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする：

$$Y = A\cup B\cup C$$

但し，

$$A = \{(x, y)\ ;\ x^2+y^2=1,\ y\geq 0\},$$
$$B = \{(x, y)\ ;\ -1\leq x\leq 0,\ y=0\},$$
$$C = \{(x, y)\ ;\ 0<x\leq 1,\ y=(1/2)\sin(\pi/x)\}.$$

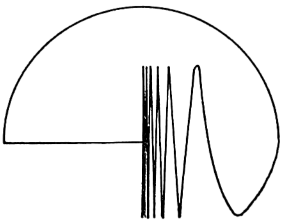


図 21.2

図 21.2 を参照．この空間は**ポーランドの円** (Polish circle) と呼ばれる．

Y が道連結であることは明らかである．さらに $B\cup C$ は道連結でないことより，Y は単連結であって，局所道連結でないことがわかる．$e:\boldsymbol{R}\to S^1$ を被覆とし，$f:Y\to S^1$ を次で定まる写像とする：

$$f(x, y) = \begin{cases}(x, y) & ((x, y)\in A\subseteq Y \text{ のとき}),\\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & ((x, y)\in B\cup C\subseteq Y \text{ のとき}).\end{cases}$$

明らかに f は連続である．$y_0=(1, 0)$, $\tilde{x}_0=0$ として条件

$$f_*\pi(Y, y_0)\subseteq p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

がみたされることがわかる (ここで，$p=e$, $\tilde{X}=\boldsymbol{R}$ である)．$\tilde{f}$ を定理 21.2 の証明のように定義すれば

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases}(\text{arc}\cos(x))/2\pi & (x, y)\in A\cup B \text{ のとき}\\ (\text{arc}\cos(x))/2\pi-1 & (x, y)\in C \text{ のとき}\end{cases}$$

明らかに $p\tilde{f}=f$, $\tilde{f}(1, 0)=0$ であるが，$\tilde{f}$ は $(0, 0)\in Y$ において連続でない．

定理 21.2 の系をいくつか述べる．最初のものは証明の必要はないだろう．

21.3 系

Yを単連結かつ局所道連結とするとき，任意の連続写像 $f: Y \to X$ は持ち上げ $\tilde{f}: Y \to \tilde{X}$ を持つ．

21.4 系

$p_1: X_1 \to X$, $p_2: X_2 \to X$ を被覆とし，X_1, X_2 は共に連結かつ局所道連結とする．x_1, x_2, x_0 をそれぞれ X_1, X_2, X の基点とし $=p_1(x_1)=p_2(x_2)=x_0$ とする．もしも

$$p_{1*}\pi(X_1, x_1) = p_{2*}\pi(X_2, x_2)$$

ならば，基点を保存する同相写像 $h: X_1 \to X_2$ で，$p_2h=p_1$ となるものが存在する．

証明 p_1, p_2 は持ち上げ $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ で $p_2\tilde{p}_1=p_1$, $p_1\tilde{p}_2=p_2$ となるものを持つ．$\varphi=\tilde{p}_2\tilde{p}_1: X_1 \to X_1$ とすると

$$p_1\varphi = p_1(\tilde{p}_2\tilde{p}_1) = (p_1\tilde{p}_2)\tilde{p}_1 = p_2\tilde{p}_1 = p_1$$

となる．さらに $\varphi(x_1)=x_1$ であるから，系 17.5 より，写像 φ は恒等写像となる．すなわち，$\tilde{p}_2\tilde{p}_1=1$ である．X_1 と X_2 の役割を入れ換えることにより，$\tilde{p}_1\cdot\tilde{p}_2=1$ を得る．従って，$\tilde{p}_1$ および $\tilde{p}_2$ は同相写像であり，$h=\tilde{p}_1$ とおけば系が得られる．▌

系 21.4 の特別な場合として，X_1 および X_2 が単連結であるときを考える．

21.5 系

$p_1: X_1 \to X$, $p_2: X_2 \to X$ を被覆とし，X_1 と X_2 は共に単連結かつ局所道連結とする．このとき，同相写像 $h: X_1 \to X_2$ で $p_2h=p_1$ となるものが存在する．

定理 15.9 より，簡単に得られる結果として，系 21.4 の逆が成立する．

21.6 系

$p_1: X_1 \to X$, $p_2: X_2 \to X$ を被覆とし，X_1, X_2 は連結かつ局所道連結とする．x_1, x_2, x_0 を基点とし，$p_1(x_1)=p_2(x_2)=x_0$ とする．もし同相写像 h: $X_1 \to X_2$ で $p_2h=p_1$ および $h(x_1)=x_2$ となるものが存在するならば

$$p_{1*}\pi(X_1, x_1) = p_{2*}\pi(X_2, x_2)$$

となる.

2つの被覆 $p_1 : X_1 \to X$, $p_2 : X_2 \to X$ が**同値**(equivalent)であるとは，同相写像 $h : X_1 \to X_2$ で $p_2 h = p_1$ となるものが存在するときをいう. X_1 および X_2 の基点が同相写像 h によって必ずしも保存される必要のないことに注意しておく. 系 21.4 および 21.6 は次のように一般化される：

21.7 定　　理

$p_1 : X_1 \to X$, $p_2 : X_2 \to X$ を被覆とし，X_1, X_2 を共に連結かつ局所道連結とする. x_1, x_2, x_0 を基点とし，$p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$ とする. この2つの被覆が同値である必要十分条件は $\pi(X, x_0)$ の部分群 $p_{1*}\pi(X_1, x_1)$ 及び $p_{2*}\pi(X_2, x_2)$ が共役であることである.

証明　系 21.4, 21.6 および定理 18.3 より直接得られる. ▮

被覆 $p : \tilde{X} \to X$ の**被覆変換群**(group of covering transformations)とは，同相写像 $h : \tilde{X} \to \tilde{X}$ で，$ph = p$ となるもの全体のなす群である(練習問題 17.9(r)を参照). この群を $G(\tilde{X}, p, X)$ で表わす. 明らかに，$\tilde{X}$ は $G(\tilde{X}, p, X)$-空間である.

21.8 定　　理

$\tilde{X}$ が連結かつ局所道連結ならば，$G(\tilde{X}, p, X)$ の $\tilde{X}$ 上への作用は真性不連続である.

証明　x を $\tilde{X}$ の任意の点とし，U を $p(x)$ の均等被覆近傍とする. $p^{-1}(U)$ は互いに交わらない $\{V_j, j \in J\}$ の和集合であり，或る k が存在して，$x \in V_k$ となる. $h \in G(\tilde{X}, p, X)$ とする. $h(x) = x$ ならば系 17.5 により写像 h は恒等写像である. 言い換えれば，$h \neq 1$ ならば $h(x) \neq x$ である. $ph(x) = x$ であるから，ある l に対し $h(x) \in V_e$ となる. さらに，もし，$V_l = V_k$ ならば $h(x) = x$ である. 従って，$h \neq 1$ ならば $x \in V_k$ かつ $h(x) \in V_l$ であって $V_k \cap V_l = \emptyset$ である.

$\tilde{X}$ は局所道連結である(従って，X も明らかにそうである)から，U は道連結であるとしてよい. 従って，各々の $V_j, j \in J$ も道連結である. いま $ph(V_k) = U$ だから $h(V_k) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$ である. ところが，$V_j, j \in J$ は道連結で，或る $x \in V_k$

に対して，$h(x)\in V_l$ であるから，$h(V_k)\subseteq V_l$．よって，$V_k\cap h(V_k)=\emptyset$ である．これは，$G(\tilde{X},p,X)$ の作用が真性不連続であることを示している．▮

この結果および前のいくつかの結果を用いて，次の興味ある結果を得る．

21.9　定　　理

$\tilde{X}$ を連結かつ局所道連結とする．$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ が $\pi(X,x_0)$ の正規部分群ならば，X は $\tilde{X}/G(\tilde{X},p,X)$ と同相である．

証明　$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ は正規部分群だから，定理 18.3 より任意の $\tilde{x}_1\in p^{-1}(x_0)$ に対して

$$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_1)=p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$$

である．よって，系 21.4 より $G(\tilde{X},p,X)$ の元 h で $h(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ となるものが存在する．従って，$p(\tilde{x}_0)=p(\tilde{x}_1)$ ならば，ある元 $h\in G(\tilde{X},p,X)$ が存在して，$h(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ となる．逆に，或る $h\in G(\tilde{X},p,X)$ に対して $h(\tilde{x}_0)=\tilde{x}_1$ ならば，$p(\tilde{x}_0)$ $p(\tilde{x}_1)$ となるのは明らかである．従って，群 $G(\tilde{X},p,X)$ は $\tilde{X}$ の点を p によって同一視するのと全く同じ仕方で同一視する．これは X と $\tilde{X}/G(\tilde{X},p,X)$ とが集合として一致することを示している．それぞれ，射影 $p:\tilde{X}\to X$ および $\pi:\tilde{X}\to X/G(\tilde{X},p,X)$ によって決まる自然な商位相を持っているから，これらは同相である．

21.10　系

$\tilde{X}$ を連結かつ局所道連結とする．$p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x}_0)$ が $\pi(X,x_0)$ の正規部分群ならば

$$\pi(X,x_0)/p_*\pi(\tilde{X},\tilde{x})\cong G(\tilde{X},p,X)$$

である．

証明　定理 21.9 および定理 19.3 より直ちに得られる．

21.11　系

$\tilde{X}$ が単連結かつ局所道連結ならば

$$\pi(X,x_0)\cong G(\tilde{X},p,X)$$

である．

21.12 練 習 問 題

(a) $\boldsymbol{R}$ の部分空間 $P=\{0, 1/n\ ;\ n$ は正の整数$\}$ は局所道連結でない.

(b) $p_1 : X_1 \to S^1$, $p_2 : X_2 \to S^1$ を n 重被覆(n は有限な正整数)とする. これらが同値であることを示せ.

(c) 次を底空間とする全ての被覆空間を決定せよ：(i) S^1, (ii) トーラス $S^1 \times S^1$, (iii) 単連結かつ局所道連結な位相空間 X.

(d) $p_1 : X_1 \to X$, $p_2 : X_2 \to X$ を被覆写像とし, X を連結かつ局所道連結とする. (i) 連続全射 $f : X_1 \to X_2$ であって $p_1 = p_2 f$ をみたすものが存在すれば $f : X_1 \to X_2$ は被覆写像であることを示せ. (ii) X_2 が道連結であって $p_1 = p_2 f$ なる連続写像 $f : X_1 \to X_2$ が存在すれば, $f : X_1 \to X_2$ は被覆写像であることを示せ.

(e) $p_1 : X_1 \to X$ および $p_2 : X_2 \to X$ を被覆とし, X_1 は単連結かつ局所道連結であり, X_2 は連結かつ局所道連結とする. このとき, 被覆写像 $p : X_1 \to X_2$ が存在することを示せ.

(f) X を連結 G-空間とし, G の X の上への作用は, 真性不連続とする. $p : X \to X/G$ の被覆変換群は G であることを示せ.

(g) $p : \tilde{X} \to X$ を被覆とし, $\tilde{X}$ を連結かつ局所道連結とする. $G(\tilde{X}, p, X)$ は $p^{-1}(x_0)$ に作用することを示せ. さらに $G(\tilde{X}, p, X)$ が $p^{-1}(x_0)$ に推移的に作用するための必要十分条件は, $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ が $\pi(X, x_0)$ の正規部分群であることを示せ(推移的作用の定義は, 練習問題 18.4.(b) 参照).

22

みたび被覆空間について：存在定理

前章で，被覆 $p:\tilde{X}\to X$ は同値なものを除いて，$\pi(X, x_0)$ の部分群 $p_*\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ の共役類によって決定されることを示した．当然，与えられた $\pi(X, x_0)$ の部分群の共役類に対して，それに属する被覆が存在するかどうかが問題になる．答えは後に示すように，X に（連結性と局所道連結性に加えて）ある条件を付ければイエスである．X の基本群全体自身の共役類に対応した被覆は常に存在する．つまり，$1:X\to X$ である．しかし，これは，つまらない．もう一方の極端な場合；自明部分群の共役類に対応する被覆は非常に興味深い．この被覆が与えられた X に対して存在するとき，それを**普遍被覆**と呼ぶ．つまり，X の普遍被覆とは，被覆 $p:\tilde{X}\to X$ であって，$\tilde{X}$ が単連結であるものである．X の普遍被覆が存在するための X に関する必要十分条件を簡単に述べよう．

$p:\tilde{X}\to X$ を X の普遍被覆とする．x が X の任意の点で，$\tilde{x}\in p^{-1}(x)$ とすると x の均等被覆近傍 U が存在して，$p^{-1}(U)$ は互いに素な $\{V_j\,;\,j\in J\}$ の和で，或る k に対して，$\tilde{x}\in V_k$ となる．V_k を V と書く．図式

$$\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle p|V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ U & \xrightarrow{\;i\;} & X \end{array}$$

は基本群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \pi(V,\tilde{x}) & \longrightarrow & \pi(\widetilde{X},\tilde{x}) \\ {\scriptstyle (p|V)_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_*} \\ \pi(U,x) & \xrightarrow{\;i_*\;} & \pi(X,x) \end{array}$$

を導く．

写像 $p|V: V\to U$ は同相写像，従って，$(p|V)_*$ は同型写像である．$p:\tilde{X}\to X$ は普遍被覆だから，群 $\pi(\tilde{X},\tilde{x})$ は自明で，従って，写像 i_* は自明準同型，即ち全ての $\alpha\in\pi(U,x)$ に対して $i_*(\alpha)=[\varepsilon_x]$ となる．このことより，$p:\tilde{X}\to X$ が X の普遍被覆ならば，全ての点 $x\in X$ は近傍 U で，準同型 $\pi(U,x)\to\pi(X,x)$ が自明であるようなものを持つことになる．この性質を持った空間 X を‘半局所単連結’であるという．即ち，空間が**半局所単連結** (semilocally simply connected) であるとは，X の全ての点に対して，x の近傍 U で U 内の点を基点とする任意の閉道は X 内で定値道 ε_x と同値となるようなものが存在するときをいう．ε_x と，U 内の閉道の同値を作っていく過程で，U の外側に出ても構わないことに注意しておく．また，もし U が x の近傍で x を基点とする U 内の全ての閉道が X 内で定値道と同値ならば，$U'\subset U$ となる全ての x の近傍 U' もまた U' 内の x を基点とする全ての閉道が，X 内で定値道と同値であるという性質を持つことにも注意する．殆どの興味ある空間はみな半局所単連結であり (練習問題参照)，連結かつ局所道連結であるが，半局所単連結でない空間の例を作ろうとすると大変難しい．そのような例として，$\boldsymbol{R}^2$ の部分空間で次のようなものがある．

$$\boldsymbol{X}=\bigcup_{n>0} C_n$$

但し，C_n は，中心 $(1/n,0)\in\boldsymbol{R}^2$，半径 $1/n$ の円である．点 $(0,0)\in X$ で，X は半局所単連結であるための条件をみたさない．従って，この空間は普遍被覆を持てないのである．

この普遍被覆の存在のための X の必要条件は，実際，十分条件でもある．

22.1 定　　理

X を連結かつ局所道連結空間とする．このとき，X が普遍被覆 $p:\tilde{X}\to X$ を持つための必要十分条件は，X が半局所単連結であることである．

証明　初めに空間 $\tilde{X}$ および写像 $p:\tilde{X}\to X$ を構成し，次に，それらが必要な性質を持つことを示す．$x_0\in X$ を基点とし，$\tilde{X}$ を x_0 を始点とする道の同値類 (定義 14.1 参照) の集合とする．即ち，

$$\tilde{X}=\{[\alpha]\,;\,\alpha: I\to X,\ \alpha(0)=x_0,\ [\alpha]=[\beta]\Leftrightarrow\alpha\sim\beta\}$$

である．$p:\tilde{X}\to X$ を $p([\alpha])=\alpha(1)$ によって定義する．

$\tilde{X}$ に位相を入れる．U を X の開集合，$\alpha: I\to X$ を x_0 を始点とし，U 内のある点 x_1 を終点とする道とする．$[U,\alpha]$ を

$$[U,\alpha]=\{[\alpha*\beta]\,;\,\beta: I\to X,\ \beta(0)=\alpha(1), \beta(I)\subseteq U\}$$

によって定める．言い換えれば，$[U,\alpha]$ は，$\alpha(1)$ を始点とし，U にすっかり含まれるような道 β についての道 $\alpha*\beta$ の同値類から成る集合である．これらの集合を用いて，$\tilde{X}$ の位相 $\mathcal{U}$ を以下のように定義する：$\mathcal{U}$ は $\emptyset, \tilde{X}$ および $[U,\alpha]$ の形をした $\tilde{X}$ の部分集合の任意の和から成るとする．$\mathcal{U}$ が $\tilde{X}$ の位相を定めることを確かめるためには，$\mathcal{U}$ の 2 つの元の共通部分がまた $\mathcal{U}$ の元であることだけを確かめればよい(位相を定めるための他の条件は明らかにみたされている)．最初に，$[\gamma]\in[U,\alpha]$ ならば $[U,\gamma]=[U,\alpha]$ であることを以下のように示す．$[\gamma]\in[U,\alpha]$ だから，U 内の道 β で，$[\gamma]=[\alpha*\beta]$ となるものが存在する．δ を $\beta(1)$ を始点とする U 内の任意の道とする．すると，

$$[\gamma*\delta]=[(\alpha*\beta)*\delta]=[\alpha*(\beta*\delta)]$$

となり，これは，$[U,\gamma]\subseteq[U,\alpha]$ であることを示している．同様の議論により $[U,\alpha]\subseteq[U,\gamma]$ がいえるから，$[U,\gamma]=[U,\alpha]$ である．次に，$[U,\alpha]$, $[U',\alpha']$ が $\mathcal{U}$ に属しているとき $[U,\alpha]\cap[U',\alpha']$ を考える．$\beta\in[U,\alpha]\cap[U',\alpha']$ ならば $[U,\beta]=[U,\alpha]$ かつ $[U',\beta]=[U',\alpha']$ である．これより直ちに

$$[U\cap U',\beta]\subseteq[U,\alpha]\cap[U',\alpha']$$

が得られ，従って，$[U,\alpha]\cap[U',\alpha']$ は

$$\{[U\cap U',\beta]\,;\,\beta\in[U,\alpha]\cap[U',\alpha']\}$$

の和であり，これは $[U,\alpha]\cap[U',\alpha']\in\mathcal{U}$ を示す．$\mathcal{U}$ の勝手な 2 つの元の共通部分がまた $\mathcal{U}$ に属することを確かめるのは，読者に委ねる(簡単である)．よって $\mathcal{U}$ は $\tilde{X}$ の位相である．

次に写像 $p:\tilde{X}\to X$ が連続であることを確かめる．U を X の開集合とする．もし $p^{-1}(U)$ が空集合ならば問題ない．$[\alpha]\in p^{-1}(U)$ とすると，定義より，$[U,\alpha]$ は $\tilde{X}$ の開集合であって，

$$\begin{aligned} p([U,\alpha]) &= \{(\alpha*\beta)(1)\,;\,[\alpha*\beta]\in[U,\alpha]\} \\ &= \{\beta(1)\,;\,[\alpha*\beta]\in[U,\alpha]\} \\ &\subseteq U \end{aligned}$$

となる．何故なら$[U,\alpha]$の定義より，βはUに含まれるからである．従って

$$p^{-1}(U)=\bigcup_{[\alpha]\in p^{-1}(U)}[U,\alpha]$$

となり，これは$\tilde{X}$の開集合であり，よってpは連続である．

次に，$p:\tilde{X}\to X$が全射であることを確かめる．これは容易で，$x\in X$とすれば，x_0を始点としてxを終点とするXの道が存在する(空間Xは道連結である)から，明らかに$[\alpha]\in\tilde{X}$かつ$p([\alpha])=x$である．

$p:\tilde{X}\to X$が被覆であることを示すために残っていることは，Xの各点が，均等被覆近傍を持つことを示すことである．$x\in X$とし，Vをxの開近傍であって道連結であり，またxを基点とする全ての閉道はX内で定値道ε_xに同値であるようなものとする．すると

$$p^{-1}(V)=\bigcup_{[\alpha]\in p^{-1}(V)}[V,\alpha]$$

となる．もしも$[V,\alpha]\cap[V,\alpha]\neq\emptyset$ならば元$[\gamma]\in[V,\alpha]\cap[V,\beta]$が存在し，従って$[V,\gamma]=[V,\alpha]$かつ$[V,\gamma]=[V,\beta]$であるから，$[V,\alpha]=[V,\beta]$である．このことより，$p^{-1}(V)$が互いに素な開集合の和集合であることが示された．次に，pによってそのそれぞれがV上に同相に写像されることを示さねばならない．写像

$$p_\alpha=p|_{[V,\alpha]}:[V,\alpha]\to V$$

は明らかに連続であることが$p_\alpha{}^{-1}(V)=[V,\alpha]$からわかる．$x\in V$とすると，$\beta$を$\alpha(1)$から$x$への$V$内の道とすれば，$[\alpha*\beta]\in[V,\alpha]$かつ$p([\alpha*\beta])=x$であり，これは，$p_\alpha$が全射であることを示している．

p_αが単射であることを示すために，或る2つの元$[\alpha*\beta]$, $[\alpha*\gamma]\in[V,\alpha]$に対して$p_\alpha([\alpha*\beta])=p_\alpha([\alpha*\gamma])$であるとする．すると$\beta$と$\gamma$は同じ終点を持つ．道$\beta*\bar{\gamma}$は$V$内の閉道であるから，$V$のとり方より，それは$X$内で定値道$\varepsilon_x$と同値である．特に$\beta\sim\gamma$であり，よって$[\alpha*\beta]=[\alpha*\gamma]$となるから，$p_\alpha$は単射であることを示している．

p_αが同相写像であることを証明するためには，$p_\alpha{}^{-1}$が連続，または同じことだがp_αが開写像であることを確かめる必要がある．$[W,\beta]$を$[V,\alpha]$の開集合であるとする．すると$N=p([W,\beta])$は，$\beta(1)$とW内の道で結べるWの点の集合である．任意の$y\in N$に対して，yを含むWの道連結な開集合W_yが存在する．$y\in N$であってW_yは道連結だから，$W_y\subseteq N$であり，よって$N=\bigcup_{y\in N}$

W_y となる．従って，$p([W,\beta])=N$ は開集合であって p_α は同相写像である．以上で $p:\tilde{X}\to X$ が被覆であるという主張の証明は終った．

定理 22.1 の証明を完結させるために，$\tilde{X}$ が単連結であることを示さねばならない．初めに $\tilde{X}$ が道連結であることを示す．$\tilde{x}_0=[\varepsilon]$ を x_0 での定値道 ε の類とし，$[\alpha]$ を $\tilde{X}$ の任意の元とする．$\tilde{\alpha}:I\to X$ を

$$\tilde{\alpha}(s)=[\alpha_s],\quad s\in I$$

によって定義する．但し，$\alpha_s(t)=\alpha(st)$ である．すると $\tilde{\alpha}$ は $\tilde{x}_0$ から $[\alpha]$ への $\tilde{X}$ 内の道である．これは $\tilde{X}$ が道連結であることを示す($\tilde{\alpha}$ は α の持ち上げであることに注意)．

β を $\tilde{x}_0$ を基点とする $\tilde{X}$ 内の閉道とする．持ち上げの一意性より，$\beta=\widetilde{p\beta}$ であり，

$$[p\beta]=[p(\widetilde{p\beta})]=[\widetilde{p\beta}(1)]=\tilde{x}_0=[\varepsilon]$$

となる．従って，$\beta=\widetilde{p\beta}$ は $\tilde{X}$ 内で定値道と同値である．よって $\tilde{X}$ は単連結であり，定理 22.1 の証明は完結する．

22.2 系

X を連結，局所道連結かつ半局所単連結空間とする．H が $\pi(X,x_0)$ の部分群ならば被覆 $p_H:X_H\to X$ で $H=p_{H*}\pi(X_H,x_H)$ となるものが同値を除いて一意的に存在する．従って，特に $\pi(X,x_0)$ の任意の部分群の共役類に対して被覆空間 $p':X'\to X$ で $p'_*\pi(X',x')$ がその共役類に属するものが存在する．

証明　$p:\tilde{X}\to X$ を X の普遍被覆空間とし $G(\tilde{X},p,X)$ をその被覆変換群とする．$G(\tilde{X},p,X)\cong\pi(X,x_0)$ であるから，H' をこの同型によって H に対応する部分群として，$X_H=\tilde{X}/H'$ とし，p_H を p によって導かれる写像とする．詳細は読者に委ねる．▌

系 22.2 で，X_H が存在するための X の条件は弱めることができる．練習問題 22.3(e)を参照．

22.3 練習問題

(a)　単連結空間は半局所単連結であることを証明せよ．

(b) 連結 n-多様体は半局所単連結であることを証明せよ．連結 n-多様体 M は，$\tilde{M}$ も n- 多様体であるような普遍被覆 $p:\tilde{M}\to M$ を持つことを証明せよ．

(c) $n>1$ に対して $\pi(S^n, x_0)$ が自明であることを以下のようにして証明せよ．$p:\tilde{S}^n\to S^n$ を普遍被覆とする．$f:D^n\to S^n$ を ∂D^n を x_0 へ写像するように定義する．f は持ち上げ $f':D^n\to\tilde{S}^n$ を持つことを示し，さらに，それは連続写像 $f'':S^n\to\tilde{S}^n$ で $pf''=1$ となるものを導くことを証明する．最後に，系列 $S^n\xrightarrow[f'']{}\tilde{S}^n\xrightarrow[p]{}S^n$ を基本群へ移して $\pi(S^n, x_0)$ が自明であることを導け．

(d) X を連結，局所道連結かつ半局所単連結空間とする．H を $\pi(X, x_0)$ の部分群とする．$\mathcal{P}$ を X 内の x_0を始点とする道の集合とする．$\mathcal{P}$ 上に関係 $\sim_H$ を

$$\alpha\sim_H\beta \Leftrightarrow \alpha(1)=\beta(1) \text{ かつ } [\alpha*\bar{\beta}]\in H$$

によって定義する．$\sim_H$ が $\mathcal{P}$ 上の同値関係であることを示せ．α の同値類を $[\alpha]_H$ とかく．$\mathcal{P}/\sim_H$ を X_H とし $p_H:X_H\to X$ を $p_H([\alpha]_H)=\alpha(1)$ によって定義する．U を X の開集合とし，$\alpha:I\to X$ を x_0 を始点とし，終点が U 内にあるような道とする．$[U,\alpha]_H$ を

$$[U,\alpha]_H=\{[\alpha*\beta]_H\,;\,\beta:I\to X,\ \beta(0)=\alpha(1),\ \beta(I)\subseteq U\}$$

によって定義する．$\varnothing, X_H$ および $[U,\alpha]_H$ の形の集合の任意の和から成る集まり $\mathcal{U}_H$ は X_H の位相を定めることを示せ．最後に，$p_H:X_H\to X$ は被覆であって，$p_{H*}\pi(X_H, x_H)=H\subseteq\pi(X, x_0)$ となることを証明せよ．

(e) X を連結かつ局所道連結空間とする．H を $\pi(X, x_0)$ の部分群とする．被覆 $p_H:X_H\to X$ で $p_{H*}\pi(X_H, x_H)=H$ となるものが存在する必要十分条件は，X の全ての点 x に対して，x の近傍 U で x を基点とする U 内の任意の閉道が，X 内で或る $H\subseteq\pi(X, x_0)$ の元と同値となるようなものが存在することであることを証明せよ(ヒント：上の(d)の証明を修正せよ)．

23

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理：I 生成元

これから議論しようとしている定理は，基本群を計算するための非常に一般的な方法を与えるものである．この定理は，1930年代の初めに，H. ザイフェルト (H. Seifert) と E. ファン・カンペン (E. Van, Kampen) によって独立に証明された．この定理は(英語を話すか，ドイツ語を話すかに依って)しばしばファン・カンペンの定理，又は時には，ザイフェルトの定理と呼ばれる．

ともに，開かつ道連結な部分空間 U_1, U_2 の和集合であるような空間 X が与えられたとする．更に $U_1 \cap U_2$ は空集合でなく，かつ道連結であるとする．ザイフェルト－ファン・カンペンの定理は，U_1, U_2 および $U_1 \cap U_2$ の基本群が解っているとして X の基本群を計算する方法を与えるものである(この定理の特別な場合は，練習問題 15, 16(c) にある)．

$x_0 \in U_1 \cap U_2$ とし，$j=1, 2$ に対し，$\psi_j : U_j \to X$ を包含写像とする．大雑把に言って，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理は，次の情報を与える．

(i) ($\pi(X, x_0)$ の‘生成元’)　$\alpha \in \pi(X, x_0)$ ならば，

$$\alpha = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\lambda(k)_*} \alpha_k$$

と表わせる．但し，$\alpha_k \in \pi(U_{\lambda(k)}, x_0)$, $\lambda(k)=1$ または 2.

(ii) ($\pi(X, x_0)$ の ‘関係子’ または ‘関係式’)

$$\alpha = \prod_{k=1}^{n} \psi_{\lambda(k)_*} \alpha_k$$

を $\pi(X, x_0)$ の元とする．$\alpha=1$ となる必要十分条件は，α がある一覧表に載っている表現を挿入したり，削除したりする有限回の操作によって，1 に帰着できることである．その表は，$\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$, $\pi(U_1, x_0)$

および $\pi(U_2, x_0)$ に依って定まる．

(i) および (ii) の情報を，群 $\pi(X, x_0)$ の表示と呼ぶ．従って，ザイフェルトーファン・カンペンの定理を正確に述べるためには，群の表示とは何かということを，詳細に述べる必要がある．群の表示は，実際，生成元と関係子（または関係式）によって群を表現するエレガントな方法である．しかし，群の表示について，更に述べる前に，幾つかの記法を導入しなければならない．

集合 S を考え，S の元を非可換な記号とする．これらの記号で**単語**(words) を作る．即ち，次のような形の表現である．

$$W = x^{\varepsilon}{}_1{}^{(1)} x_2{}^{\varepsilon(2)} \cdots x_k{}^{\varepsilon(k)}$$

但し，$x_i \in S$ とし，重複が許されるとし，かつ $\varepsilon(i) = \pm 1$ である．(言い換えれば，集合 $S = \{y_j\,;\,j = J\}$ からアルファベット $\{y_j{}^1, y_j{}^{-1}\,;\,j \in J\}$ が得られ，それで単語が作られるのである．記号が全く現われない，**空語**(empty word) を考えると便利である．単語が**既約**(reduced) であるとは，x に引き続いて x^{-1} がきていたり，逆に x^{-1} に引き続いて x がきていたりするような $x \in S$ を含まないときを言う．従って，$x_1{}^1 x_1{}^1 x_1{}^1$ は既約な単語であるが，$x_1{}^1 x_1{}^{-1} x_1{}^1$ はそうでない．全ての単語は $x^1 x^{-1}$ または $x^{-1} x^1$ (但し $x \in S$) のような対が単語の中に現われていれば，単にそれを取り除いていけば，既約な単語に帰着させることができる．例えば，$x_1{}^{-1} x_2{}^1 x_2{}^{-1} x_1{}^1 x_3{}^1$ は $x_1{}^{-1} x_1{}^1 x_3{}^1$ に帰着し，更に，$x_3{}^1$ へ帰着する．既約な単語を並置することによって，積を定め，必要なら得られた単語を既約にすれば，S の記号に依る既約単語の集合 G は群になることが解る．空語が単位元であり，単語 $W = x_1{}^{\varepsilon(1)} x_2{}^{\varepsilon(2)} \cdots x_k{}^{\varepsilon(k)}$ の逆元は，

$$W^{-1} = x_k{}^{-\varepsilon(k)} x_{k-1}{}^{-\varepsilon(k-1)} \cdots x_2{}^{-\varepsilon(2)} x_1{}^{-\varepsilon(1)}$$

で与えられる．群の公理を確かめることは，読者に委ねる．この群を **S によって生成された自由群**(free group generated by S) と呼ぶ．勿論，S の記号そのものは本質的でない．即ち，S' を S と 1 対 1 に対応する，もう 1 つの集合とすると，S および S' によって生成される 2 つの自由群は互いに同型である．S が有限で，n 個の元から成るとき，S によって生成される自由群を，n 生成元による自由群(free group on n generators) と呼ぶ．

1 生成元 $\{x\}$ による自由群は次の元から成る

$$1, x^1, x^{-1}, x^1 x^1, x^{-1} x^{-1}, x^1 x^1 x^1, x^{-1} x^{-1} x^{-1}, \cdots$$

更に，これが整数の群 $\boldsymbol{Z}$ と同型であることを示すのは難しくない．しばしば，x^1 を x, x^1x^1 を x^2, $x^{-1}x^{-1}$ を x^{-2} 等々と略記する．また $n>1$ に対して，n 生成元による自由群は，非可換な無限群であることも注意しておく．

後の便宜のために，適当な同値関係の下の単語の同値類を考えることにより少し異なった見地から自由群を眺めてみる．単語に対する次のような操作を考える；

(i) 単語の中に xx^{-1} または $x^{-1}x$ を挿入する，但し $x \in S$,

(ii) 単語の中の xx^{-1} または $x^{-1}x$ を削除する，但し $x \in S$

(単語 W に xx^{-1} を挿入するとは，W を W_1W_2 と書いて xx^{-1} を $W_1xx^{-1}W_2$ のように挿入することを意味する．このとき勿論 W_1 または W_2 は空でも良い)．2 つの単語 W, W' が同値であるとは，W' が W から有限回の (i) または (ii) の操作によって得られることを言う．これは明らかに同値関係であり，更に，任意の単語はその既約形に同値であることも明らかである．S の単語の同値類の集合は並置による積によって S によって生成された自由群となる．簡単のため，単語 W を含んだ同値類も W と書く．こうしても混乱は生じないであろう．

次に，R を S の文字から成る単語の集合とする．S の文字から成る単語に対して，以下のような操作を新たに考える：

(iii) 単語の中に r または r^{-1} を挿入する，但し $r \in R$,

(iv) 単語の中の r または r^{-1} を削除する，但し $r \in R$.

こうして，2 つの単語 W, W' が同値であるとは，W' が W から有限回の (i), (ii), (iii) または (iv) の操作によって得られるときを言う．読者は，これが同値関係であること，および，同値類全体の集合が並置による積によって，群をなすことを容易に確かめることができる．この群を**表示** $(\boldsymbol{S};\boldsymbol{R})$ **を持つ群**と呼び，$\langle S; R\rangle$ と書く．先程と同様に，単語 W を含んだ同値類も W と書くが，混乱は起こらないであろう．S を**生成元**の集合と呼び，R を**関係子**の集合と呼ぶ．次に 3 つの (簡単な) 例を挙げる．第 1 に表示 $(S;\emptyset)$ を持つ群とは，単に，S によって生成された自由群のことである．2 番目の例は，$\langle \{x\};\{x^n\}\rangle$ である，但し，n はある正整数の定数とする．この群は単語

$$1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$$

から成り，巡回群 $\boldsymbol{Z}_n$ に同型であることが簡単に確かめられる．3 つめの例と

して，$\langle\{x,y\};\{xyx^{-1}y^{-1}\}\rangle$ を考える．$xy=yx$ である，(操作(iii)および(ii)により，$xy=(xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy=yxy^{-1}x^{-1}xy=yxy^{-1}y=yx$)．すると，全ての整数 a,b に対して，$x^ay^b=y^bx^a$ となることを示すのは難しくない．従って，任意の単語 $g=x^{a(1)}y^{b(1)}x^{a(2)}\cdots x^{a(k)}y^{b(k)}$ は，$a=\sum_{i=1}^k a(i)$ および，$b=\sum_{i=1}^k b(i)$ として，$g=x^ay^b$ と書き直せる．従って，群 $\langle\{x,y\};\{xyx^{-1}y^{-1}\}\rangle$ は $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ に同型である．

α が S の文字から成る単語で，$\langle S;R\rangle$ の中で $\alpha=1$ であるとしても，勿論，α 自身が R に属しているとは限らない．しかし α は有限回の操作(i), (ii), (iii)および(iv)の列によって空語に帰着できる．このような場合，α は関係子 R の帰結であると言う．例えば，$x^ay^bx^{-a}y^{-b}$ は関係子 $xyx^{-1}y^{-1}$ の帰結である．

異なった表示が同型な群を表わすこともあり得る．例えば，群 $\langle\{x,y\};\{y\}\rangle$ は群 $\langle\{x\},\varnothing\rangle$ と同型である．同様に，群 $\langle\{a,b\};\{baba^{-1}\}\rangle$ は群 $\langle\{a,c\};\{a^2c^2\}\rangle$ と同型である．このことを示すために，

$$f:\langle\{a,b\};\{baba^{-1}\}\rangle\to\langle\{a,c\};\{a^2c^2\}\rangle$$

を生成元について，$f(a)=a$, $f(b)=ca$ と定め，一般には

$$f({x_1}^{\varepsilon(1)}{x_2}^{\varepsilon(2)}\cdots{x_n}^{\varepsilon(n)})=f(x_1)^{\varepsilon(1)}f(x_2)^{\varepsilon(2)}\cdots f(x_n)^{\varepsilon(n)}$$

によって定義する．すると，

$$f(baba^{-1})=caacaa^{-1}=ca^2c=ca^2c^2c^{-1}=cc^{-1}=1,$$

であるから，写像が矛盾無く定義され，準同型写像であることが容易に解る．

$$g:\langle\{a,c\};\{a^2c^2\}\rangle\to\langle\{a,b\};\{baba^{-1}\}\rangle$$

を，生成元について，$g(a)=a$, $g(c)=ba^{-1}$ と定めれば，g は矛盾無く定義された準同型写像であることおよび $fg=1$, $gf=1$ となることが容易に確かめられる．従って，f および g は群の同型写像である．

2つの表示が同型な群を定めているかどうかを決定する問題は，一般に極めて難しい．2つの群が同型であることが解っている場合でさえ，それを示すのは難しく思える．例えば，群 $\langle\{x,y\};\{xy^2x^{-1}y^{-3},\ yx^2y^{-1}x^{-3}\}\rangle$ は実際には自明群1と同型であるが，これを示すことは極めて難しいのである(それでも，読者は，この群が本当に自明群であることを証明しようとしてみるべきである)．このような悲観的な状況にも拘らず，2つの群が異なっているかどうかを判定する，色々なトリックが存在する．それらのトリックは必要に応じて導入することにする．

任意の群 G が与えられたとき，G が表示 $(S;R)$ を持つとは，G が $\langle S;R\rangle$ と同型であるときを言う．全ての群は，

$$S_G=\{g\in G\},\quad R_G=\{(xy)^1y^{-1}x^{-1}\ ;\ x,y\in G\}$$

としたとき，表示 $(S_G;R_G)$ を持つ；ここに $(xy)^1$ は，$xy\in G$ を表わす記号を意味する．G が $\langle S_G;R_G\rangle$ と同型であることを示すことは練習問題として読者に委ねる．

群 $\langle S;R\rangle$ の関係子の集合 R を，関係式の集合として書いておく方が，時としてより便利である．即ち，集合 $\{r\ ;\ r\in R\}$ を $\{r=1\ ;\ r\in R\}$ と書き直すのである．更に r が 2 つの単語の積 uv であるならば，$r=1$ を $u=v^{-1}$ に置き換える．こうして，例えば，$\langle\{A,B\}\ ;\ ABA^{-1}B^{-1}\}\rangle$ を $\langle\{A,B\};\{ABA^{-1}B^{-1}=1\}\rangle$ または $\langle\{A,B\};\{AB=BA\}\rangle$ と書ける．もう 1 つの例として，上に挙げた関係子の集合 R_G は $\{(xy)^1=x^1y^1\ ;\ x,y\in G\}$ と書ける．このような，形式にこだわらない記法によって混乱は起こらないだろう．

23.1 練習問題

(a) G を群とするとき，G は $\langle S_G\ ;\ R_G\rangle$ に同型であることを示せ．但し，$S_G=\{g\in G\}$，$R_G=\{(xy)^1y^{-1}x^{-1}\ ;\ x,y\in G\}$ とする．

(b) $R=\{A^4,\ A^2B^{-2},\ A^3BA^{-1}B^{-1}\}$ とするとき，群 $\langle\{A,B\}\ ;\ R\rangle$ の位数は何か．

(c) 群 $\langle\{A,B\};\{A^4,\ B^2,\ ABA^{-1}B^{-1}\}\rangle$ は $\boldsymbol{Z}_4\times\boldsymbol{Z}_2$ に同型であることを示せ．

(d) G を表示 $(S\ ;\ R)$ を持つ群とする．AG を表示 $(S\ ;\ AR)$ をもつ群とする．但し

$$AR=R\cup\{xyx^{-1}y^{-1}\ ;\ x,y\in S\}$$

とする．AG はアーベル群であって，全射準同型 $G\rightarrow AG$ が存在することを示せ．また，この全射準同型の核は何か．

(e) 練習問題 19.5(e) を用いて，クラインの壺の基本群は表示 $(\{a,b\};\{abab^{-1}\})$ を持つことを示せ．

(f) $G=\langle S\ ;\ R\rangle$ とする．$T_i(i=1,2,3,4)$ を対 $(S\ ;\ R)$ 上の以下のような変換とする．これらをテーチェ変換と呼ぶ．

T_1：γ が S の文字から成る単語で G に於て関係式 $\gamma=1$ が成り立つとき，$S'=S$, $R'=R\cup\{\gamma\}$ と定める．

T_2 : $\gamma \in R$ が群 $\langle S\,;\,R-\{\gamma\}\rangle$ に於て関係式 $\gamma=1$ が成り立つとき，$S'=S$, $R'=R-\{\gamma\}$ と定める．

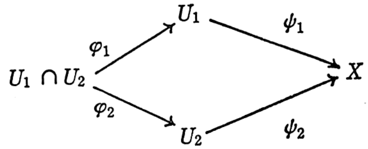
T_3 : w が S の文字から成る単語で，x が S に含まれない記号とするとき，$S'=S\cup\{x\}$, $R'=R\cup\{wx^{-1}\}$ と定める．

T_4 : $x\in S$ とし，w を S の文字から成る単語で，x および x^{-1} を含まず，$wx^{-1}\in R$ であるとする．このとき $R-\{wx^{-1}\}$ の全ての元に含まれる w を x で置き換えて得られる集合を R' とし，$S'=S-\{x\}$ と定める．

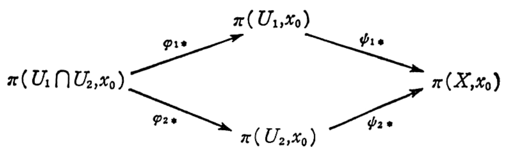
このとき，$(S''\,;\,R'')$ が $(S\,;\,R)$ から，有限回のテーチェ変換によって得られるならば，$\langle S''\,;\,R''\rangle$ は $\langle S\,;\,R\rangle$ と同型であることを証明せよ．

(変換 T_1 および T_2 は，各々，余分な関係式を付け加えたり，取り除いたりすることに対応し，T_3 および T_4 は各々，余分な生成元を付け加えたり，取り除いたりすることに対応する．)

次に，X を位相空間で道連結な開集合 U_1, U_2 の和であって，$U_1\cap U_2$ が空でなく，道連結となるようなものとする．$\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ を右図に示すような包含写像とする．



基点として，点 $x_0\in U_1\cap U_2$ を選ぶ．すると次のような準同型の可換図式を得る：



$U_1\cap U_2$ および U_1, U_2 の基本群が解っているとし，それらの群の表示が次のように与えられているとする：

$$\pi(U_1\cap U_2, x_0)=\langle S\,;\,R\rangle$$
$$\pi(U_1, x_0)=\langle S_1\,;\,R_1\rangle$$
$$\pi(U_2, x_0)=\langle S_2\,;\,R_2\rangle$$

$s\in S$ ならば，$\varphi_{1*}s\in\pi(U_1, x_0)$ および $\varphi_{2*}s\in\pi(U_2, x_0)$ であり，これらは各々，S_1, S_2 の文字から成る単語として表わせる．'$\varphi_{1*}s$', '$\varphi_{2*}s$' を各々生成元 S_1, S_2

の単語としての $\varphi_{1*}s, \varphi_{2*}s$ の表現とする．

23.2　定　義

R_s で次のような $S_1\cup S_2$ に於ける単語の集合を表わす：

$$\{(`\varphi_{1*}s')^{-1}(`\varphi_{2*}s')\ ;\ s\in S\}.$$

R_s を関係子の集合と考える．関係式の集合として R_s は

$$\{`\varphi_{1*}s'=`\varphi_{2*}s'\ ;\ s\in S\}.$$

となる．

これで，H. ザイフェルトと E. ファン・カンペンの定理を述べることができる．

23.3　ザイフェルト－ファン・カンペンの定理

$\pi(X, x_0)$ は，生成元 $S_1\cup S_2$ および，関係式 $R_1\cup R_2\cup R_s$ に依って定まる群に同型である．

$\pi(U_1\cap U_2, x_0)$ の関係式 R は必要でないことに注意する．

大雑把に言えば，$\pi(X, x_0)$ は $\pi(U_1, x_0)$ および $\pi(U_2, x_0)$ によって生成され，$s\in\pi(U_1\cap U_2, x_0)$ について，$\varphi_{1*}s=\varphi_{2*}s$ となるような群の内最小のものである．

この定理の証明は本質的に 2 つの部分に分かれる．その初めの部分は，生成元に関する部分で，この章で証明される．後半の部分は関係式に関する部分で，次の章で証明される．次に有用な結果を証明する(実際には，練習問題 7.13(g) そのものである)；第 16 章と同じように，この結果を用いないことも可能である．

23.4　定　理

X を距離 d を持つコンパクト位相空間とする．開被覆 $\{U_j\ ;\ j\in J\}$ が与えられたとき，実数 $\delta>0$ ($\{U_j\ ;\ j\in J\}$ の **Lebesgue**(ルベーグ)数と呼ばれる)が存在して，直径が δ 以下の任意の部分集合は，1 つの集合 $U_j, j\in J$ に含まれる．

証明　X はコンパクトだから，J は有限集合と仮定してよい．$x\in X$ と $j\in J$ に対して，$f_j(x)$ を

$$f_j(x) = d(x, X\text{-}U_j) = \inf_{y \in X - U_j} d(x, y)$$

と定める．明らかに f_i は連続であり，

$$f(x) = \max_{j \in J} f_i(x)$$

と定めれば，f も連続である．$X-U_j$ は閉集合だから，$f_j(x)=0$ となる必要十分条件は，$x \in X-U_j$ である．従って，$f(x)=0$ となる必要十分条件はすべての $j \in J$ に対して $x \in X-U_j$ となることである．ところが $\{U_j\,;j \in J\}$ は X の被覆であるから，すべての $x \in X$ に対し $f(x)>0$ となる．X がコンパクトであり f が連続であることから，$f(x)$ は $\boldsymbol{R}$ の，実際，$(0,\infty) \subset \boldsymbol{R}$ のコンパクト部分集合である．従って，$\delta>0$ で，すべての $x \in X$ に対し $f(x)>\delta$ となるものが存在する．次に，直径が δ にみたない任意の集合 S は或る $U_k, k \in J$ に含まれることを主張する．そのために，$x \in S$ を取る：すると，$f(x)>\delta$ でありこれは或る k に対して $f_k(x)>\delta$ であることを示し，更に $x \in U_k$ であることを示す．しかし，S の直径は δ 未満であって，或る $x \in S$ に対し $d(x, X-U_k)>\delta$ であるから，S 自身が U_k に含まれることになる．よって主張は示された．▌

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理の証明の第1段階は，生成元に関する部分である．本質的には，練習問題 14.6(g), (h) および (i) を解くことになる．

23.5 補　　題

群 $\pi(X, x_0)$ は

$$\phi_{1*}(\pi(U_1, x_0)) \cup \phi_{2*}(\pi(U_2, x_0))$$

で生成される．言い換えれば，$\alpha \in \pi(X, x_0)$ に対し，$\alpha = \prod \phi_{\lambda(k)*}\alpha_k$，但し，$\alpha_k \in \pi(U_{\lambda(k)}, x_0)$, $\lambda(k)=1$ または2，という形に書ける．

証明　f を $x_0 \in X$ を基点とする閉道とする．δ を I の開被覆 $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$ のルベーグ数とする．即ち，

$0=t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n=1$ なる実数列 $t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n$ が $t_i - t_{i-1} < \delta$ をみたすならば，$f([t_{i-1}, t_i])$, $i=1,2,\cdots,n$, は U_1 または U_2 に含まれる．ここで，$f(t_i) \in U_1 \cap U_2$ と仮定できる．（もし，$f(t_i) \in U_1 \cap U_2$ ならば $[t_{i-1}, t_i]$ および $[t_i, t_{i+1}]$ は共に U_1 に含まれるか，又は共に U_2 に含まれるかであり，従ってこれらの2つの区間を合わせて $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ としても，$f([t_{i-1}, t_i])$ は U_1 または U_2 の中にある．そして添字を付け替えて，また初めからこの手順を続ける；図 23.1 を参照)

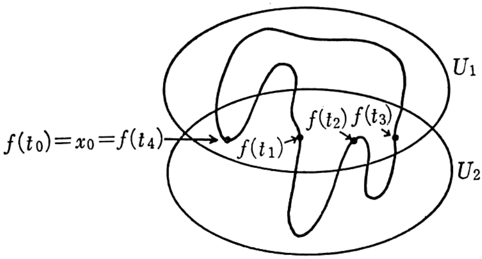


図 23. 1

道 $f_i : I \to X,\ i=1,2,\cdots,n$ を

$$f_i(t) = f((1-t)t_{i-1}+tt_i)$$

によって定義する．f_i は U_1 の中の，または U_2 の中の，$f(t_{i-1})$ を始点とし $f(t_i)$ を終点とする道であることに注意しよう．次のことが成り立つ

$$[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_n]$$

これは，練習問題 14. 6 (i) そのものであるが，証明を完了させるためにここで証明する．

23. 6 補　　題

$f\ ; I \to X$ を道とし，また

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n = 1$$

とする．$j=1,2,\cdots,n$ について $f_j : I \to X$ を

$$f_j(t) = f((1-t)t_{j-1}+tt_j)$$

によって定めるとき，

$$[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_n]$$

が成立する．

証明　証明は n に関する帰納法による．先ず $n=2$ と仮定すると，$0=t_0 \leq t_1 \leq t_2=1$ であり

$$(f_1 * f_2)(t) = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ f_2(2t-1) & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} f(2tt_1) & 0\le t\le \dfrac{1}{2} \\ f((1-(2t-1))t_1+2t-1) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

となる．$f_1*f_2\sim f$ を示すためには，次のホモトピー $F:I\times I\to X$ を用いればよい：

$$F(t,s)=\begin{cases} f((1-s)2tt_1+st) & 0\le t\le \dfrac{1}{2} \\ f((1-s)(t_1+(2t-1)(1-t_1))+st) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1 \end{cases}$$

次に，$n>2$ と仮定し，$n-1$ 以下で成立しているとする．

$$0=t_0\le t_1\le\cdots\le t_n=1$$

である．$0\le t_0\le t_{n-1}\le t_n=1$ であるから，上の結果を用いれば，$g(t)=f(tt_{n-1})$ について

$$f\sim g*f_n$$

を得る．今，

$$0=\frac{t_0}{t_{n-1}}\le\frac{t_1}{t_{n-1}}\le\cdots\le\frac{t_{n-2}}{t_{n-1}}\le\frac{t_{n-1}}{t_{n-1}}=1$$

であるから，

$$\begin{aligned} g_i(t) &= g((1-t)t_{i-1}/t_{n-1}+tt_i/t_{n-1}) \\ &= f((1-t)t_{i-1}+tt_i) \\ &= f_i(t) \end{aligned}$$

について，帰納法の仮定より，

$$[g]=[g_1][g_2]\cdots[g_{n-1}]$$

が成り立つ．従って $[f]=[f_1][f_2]\cdots[f_n]$ であり，証明が終る．

別証明として，以下のように直接に証明しても良い．

$$((\cdots((f_1*f_2)*f_2)*\cdots)*f_n)(t)$$

$$=\begin{cases} f_1(2^{n-1}t) & 0\le t\le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \\ f_2(2^{n-1}t-1) & \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\le t\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}, \\ \quad\vdots & \quad\vdots \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_k(2^{n-k+1}t-1) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1}t \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \\ \vdots & \vdots \\ f_n(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2^{n-1}tt_1) & 0 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \\ f(t_1+(2^{n-1}t-1)t_2-t_1) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \\ \vdots & \vdots \\ f(t_{k-1}+(2^{n-k+1}t-1)(t_k-t_{k-1})) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \\ \vdots & \vdots \\ f(t_{n-1}+(2t-1)(1-t_{n-1})) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= f(h(t))$$

但し，$h: I \to I$ は

$$h(t) = \begin{cases} 2^{n-1}tt_1 & 0 \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ t_{k-1}+(2^{n-k+1}t-1)(t_k-t_{k-1}) & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k+1} \leq t \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \\ & k=2,3,\cdots,n \end{cases}$$

で定まる連続関数である．$F: I \times I \to X$ を

$$F(t,s) = f(sh(t)+(1-s)t)$$

によって定義すると，明らかに F は連続で，従って

$$f \sim (\cdots((f_1 * f_2) * f_3) * \cdots) * f_n$$

となり，求める結果が，証明された．

補題 23.5 の証明に戻る．$i=1,2,\cdots,n-1$ に対して，道 $q_i: I \to X$ を，$q_i(0)=x_0$，$q_i(1)=f(t_i)$ および全ての $t \in I$ に対して $q_i(t) \in U_1 \cap U_2$ となるように選ぶ．また q_0 および q_n を，$q_0(t)=q_n(t)=x_0$ と定める．図 23.2 参照．

$[f]=[f_1][f_2]\cdots[f_n]$ であるから，

$$[f] = [q_0][f_1][\bar{q}_1][q_1][f_2][\bar{q}_2]\cdots[q_{n-1}][f_n][\bar{q}_n]$$
$$= [q_0 * f_1 * \bar{q}_1][q_1 * f_2 * \bar{q}_2]\cdots[q_{n-1} * f_n * \bar{q}_n]$$

となる．各 $q_i * (f_{i+1} * \bar{q}_{i+1})$ は x_0 を基点とする閉道であり，U_1 または U_2 に完全に含まれる．従って，$[q_i * f_{i+1} * \bar{q}_{i+1}]$ は $\phi_{1*}\pi(U_1, x_0)$ または $\phi_{2*}\pi(U_2 x_0)$ のどち

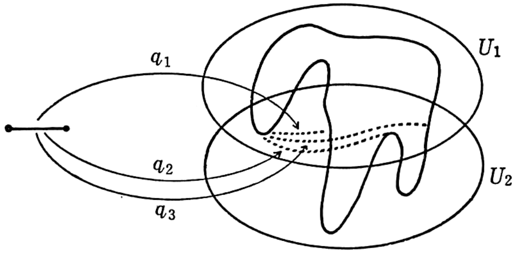


図 23. 2

らかの元である．このようにして，$\pi(X, x_0)$ の各元は，$\pi(U_1, x_0)$ および $\pi(U_2, x_0)$ の元の像の積として書け，補題 23. 5 が証明された．

23. 7　系

S_1, S_2 が各々 $\pi(U_1, x_0)$, $\pi(U_2, x_0)$ を生成しているとするとき，群 $\pi(X, x_0)$ は集合 $\phi_1{}^*S_1 \cup \phi_2{}^*S_2$ によって生成される．

ϕ_{1*} および ϕ_{2*} を書くのは煩しいので，$s \in S_j$, $j=1, 2$, に対して $\phi_{j*}s$ と書く代わりに s と書くことにする．言い換えると，$f: I \to U_j$ とするとき，合成 $I \xrightarrow{f} U_i \xrightarrow{\phi_i} X$ もまた f と書くことにする．この意味で $\pi(X, x_0)$ は，S_1, S_2 が各々，$\pi(U, x_0)$, $\pi(U_2, x_0)$ を生成するとき，$S_1 \cup S_2$ によって生成される．

次の系は，系 23. 7 から直ちに得られる．

23. 8　系

$S_1 = S_2 = \emptyset$ ならば $\pi(X, x_0)$ は自明である．

この系の特別な場合として：

23. 9　系

$n \geq 2$ ならば，S^n は単連結である．

この事実は，S^n が $U_1 = S^n - \{(1, 0, 0, 0, \cdots, 0)\}$, $U_2 = S^n - \{(-1, 0, 0, \cdots, 0)\}$ とするとき，$U_1 \cup U_2$ と表わされるので，系 23. 8 より得られる．U_1, U_2 は同相写像

$$\varphi_1 : U_1 \to \boldsymbol{R}^n,\ \ \varphi_1(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1-x_1}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{1-x_1}\right)$$

$$\varphi_2 : U_2 \to \boldsymbol{R}^n,\ \ \varphi_2(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{1+x_1}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{1+x_1}\right)$$

によって，共に $\boldsymbol{R}^n$ と同相となるので単連結である.

第 19 章の結果を用いて，次のことが言える.

23.10　系

$\boldsymbol{RP}^n$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_2$ であり，$L(p,q)$ の基本群は $\boldsymbol{Z}_p$ である.

23.11　練 習 問 題

$X=\bigcup_{i=1}^n U_i$ とし，各 $U_i, i=1,2,\cdots,n$ は開かつ道連結とする．また，$\bigcap_{i=1}^n U_i$ は空でなく，道連結であるとし，$x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ とする．$\phi_i : U_i \to X$ を包含写像とするとき，$\pi(X, x_0)$ は $\bigcup_{i=1}^n \phi_{i*}\pi(U_i, x_0)$ によって生成されることを証明せよ.

24

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理：II 関係式

この章で，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理(定理 23.3)の証明が完結する．U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ を X の空でない道連結開集合として，$X = U_1 \cup U_2$ であると仮定したことを想い出そう．基点 x_0 は $U_1 \cap U_2 \subseteq X$ の中にとり，$\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ は S によって生成され，$j=1, 2$ に対して $\pi(U_j, x_0)$ は表示 $(S_j\ ;\ R_j)$ を持つとした．最後に R_s は $s \in S$ に対して関係式 '$\varphi_{1*}s$'='$\varphi_{2*}s$' の集合であるとした．前章では，$\pi(X, x_0)$ は $S_1 \cup S_2$ で生成されることを証明した．

24.1 補　題

$\pi(X, x_0)$ の生成元 $S_1 \cup S_2$ は関係式 R_1, R_2 および R_s を満足する．

証明　$j=1, 2$ に対して

$$\psi_{j*} : \pi(U_j : x_0) \to \pi(X, x_0)$$

は準同型だから，S_j の元が $\pi(U_j, x_0)$ の中でみたす勝手な関係式は，$\psi_{j*}S_j \subseteq \pi(X, x_0)$ の元もみたす．従って，ψ_{j*} を省略することにすれば，$S_1 \cup S_2$ の元は，$\pi(X, x_0)$ の中で関係式 R_1 および R_2 をみたす．

$s \in S \subseteq \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ ならば，$\psi_1\varphi_1 = \psi_2\varphi_2$ だから

$$\psi_{1*}\varphi_{1*}s = \psi_{2*}\varphi_{2*}s$$

である．S_j の元から成る単語が $\varphi_{j*}s$ を表わすならば，その同じ S_j での単語が $\pi(X, x_0)$ 内で $\psi_{j*}\varphi_{j*}s$ を表わし，従って

$$\text{'}\varphi_{1*}s\text{'} = \text{'}\varphi_{2*}s\text{'}, \quad s \in S$$

が成り立つ．よって補題 24.1 の証明が終了した．▌

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理の証明は，補題 24.1 で述べられた

関係式が，その関係式を尽くしているということを示せば完了する．

24.2　定　　理

$S_1 \cup S_2$ の元が $\pi(X, x_0)$ の中である関係式をみたすならば，それは，関係式 R_1, R_2 および R_s の帰結である．

証明　この定理の証明は難しくないが，非常に長く，また，多くの記号を必要とする．

$\alpha_1{}^{\varepsilon(1)}\alpha_2{}^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_k{}^{\varepsilon(k)}=1$ を $S_1 \cup S_2 \subseteq \pi(X, x_0)$ の元の間のある関係式とする．ここで $i=1, 2, \cdots, k$ に対し，$\varepsilon(i)=\pm 1$ かつ $\alpha_i \in S_{\lambda(i)}$，但し，$\lambda_{(i)}=1$ または 2，である．各 i，$i=1, 2, \cdots k$，に対して，x_0 を基点とする $U_{\lambda(i)}$ 内の閉道 f_i で $[f_i]=\alpha_i{}^{\varepsilon(i)}$ となるものを選ぶ．言い換えれば，もし $\varepsilon(i)=1$ なら $\alpha_i=[f_i]$，また，もし $\varepsilon(i)=-1$ なら $\alpha_i=[\bar{f}_i]$ である．道 $f: I \to X$ を

$$f(t) = f_i(kt-i+1) \qquad \frac{i-1}{k} \leq t \leq \frac{i}{k},\ i = 1, 2, \cdots, k$$

によって定義する．

$$f_j(t) = f((1-t)(j-1)/k+tj/k)$$

であることに注意し，

$$0 = 0/k \leq 1/k \leq \cdots \geq k/k = 1$$

であるから，補題 23.6 を用いて，

$$[f] = [f_1][f_2]\cdots[f_k]$$

となる．$\alpha_1{}^{\varepsilon(1)}\alpha_2{}^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_k{}^{\varepsilon(k)}=1$ であるから，$[f]=1$，即ち $f \sim \varepsilon_{x_0}$ となる．$F: I \times I \to X$ を，f と ε_{x_0} との間のホモトピーとする，即ち，

$$F(t, 0) = f(t)$$
$$F(t, 1) = F(0, s) = F(1, s) = x_0$$

とする．

次に，δ を $I \times I$ の開被覆 $\{F^{-1}(U_1),\ F^{-1}(U_2)\}$ のルベーグ数とし，

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m = 1$$
$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n = 1$$

を

(i)　$\{1/k, 2/k \cdots, (k-1)/k\} \subseteq \{t_1, t_2, \cdots, t_{m-1}\}$

および

(ii)　全ての i, j に対し，$(t_i - t_{i-1})^2 + (s_j - s_{j-1})^2 < \delta^2$

をみたすように選ぶ．明らかに，このように選ぶことは可能である．$I \times I$ の矩形 $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$ を $R_{i,j}$ と書くと，全ての i, j に対し，$F(R_{i,j})$ は U_1 または U_2 のどちらかに含まれる．

各 i, j に対して，$a_{i,j} : I \to X$ を x_0 から $F(t_i, s_j)$ への道で，$F(t_i, s_j)$ が U_1 内または U_2 内または $U_1 \cap U_2$ 内にあるのに従って各々，U_1 内，U_2 内，$U_1 \cap U_2$ 内の道であるとする．U_1, U_2 および $U_1 \cap U_2$ は道連結であることから，このようにとることは可能である．$F(t_i, s_j) = x_0$ であるならば，$a_{i,j} = \varepsilon_{x_0}$ と思う (図 24.1 参照)．

また，道 $b_{i,j}, c_{i,j}$ を次のように定義する：

$$b_{ij}(t) = F((1-t)t_{i-1} + tt_i, s_j),$$
$$c_{i,j}(t) = F(t_i, (1-t)s_{j-1} + ts_j),$$

よって $b_{i,j}$ は $F(t_{i-1}, s_j)$ から $F(t_i, s_j)$ への，$c_{i,j}$ は $F(t_i, s_{j-1})$ から $F(t_i, s_j)$ への道である：図 24.1 を見よ．

$$[f] = [b_{1,0}][b_{2,0}]\cdots[b_{m,0}]$$
$$[\varepsilon_{x0}] = [b_{1,n}][b_{2,n}]\cdots[b_{m,n}]$$

であることに注意する．

道 $b_{i,j-1} * c_{i,j}$ と $c_{i-1,j} * b_{i,j}$ は道として同値である：直観的には，領域 $F(R_{i,j})$ の中で道を動かしてみれば良い．道の同値を明確に，ホモトピー $H : I \times I \to X$ によって与えれば，例えば

$$H(t,s) = \begin{cases} F((1-s)((1-2t)t_{i-1} + 2tt_i) + st_{i-1}, \\ \qquad (1-s)s_{j-1} + s((1-2t)s_{j-1} + 2ts_j)), & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ F((1-s)t_i + s((2-2t)(t_{i-1} + (2t-1)t_i)), \\ \qquad (1-s)(2-2t)s_{j-1} + (2t-1)s_j) + ss_j), & \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

となる．

$F(R_{i,j}) \subseteq U_1, U_2$ または $U_1 \cap U_2$ であるのに従って，各々，$H(I \times I) \subseteq U_1, U_2$ または $U_1 \cap U_2$ であることに注意しよう．

次に，x_0 を基点とする閉道 $f_{i,j}$ および $g_{i,j}$ を

$$f_{i,j} = (a_{i-1,j} * b_{i,j}) * \bar{a}_{i,j}$$

$$g_{i,j}=(a_{i,j-1}*c_{i,j})*\bar{a}_{i,j}$$

と定義する．$b_{i,j-1}*c_{i,j}\sim c_{i-1,j}*b_{i,j}$ であるから，道 $f_{i,j-1}*g_{i,j}$ および $g_{i-1,j}*f_{i,j}$ は同値な道である．更に，$F(R_{i,j})\subseteq U_1, U_2$，または $U_1\cap U_2$ に従って，これらの道は，各々，U_1, U_2 または $U_1\cap U_2$ の中で同値となる．よって

$$f_{i,j-1}\sim(g_{i-1,j}*f_{i,j})*\bar{g}_{i,j}$$

即ち，

$$[f_{i,j-1}]=[g_{i-1,j}][f_{i,j}][\bar{g}_{i,j}]$$

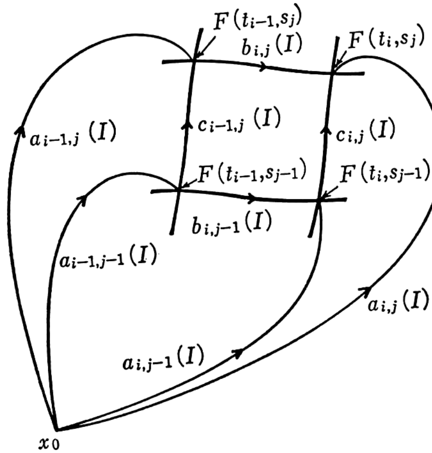


図 24.1

を得る．これらの元の各々を S_1 または S_2 の単語で表わせば，$\pi(U_1, x_0)$ または $\pi(U_2, x_0)$ の中で，関係式

$$`[f_{i,j-1}]' = `[g_{i-1,j}]'\,`[f_{i,j}]'\,`[\bar{g}_{i,j}]'$$

が得られる．従って，この関係式 R_1 または R_2 の帰結でなければならない．

次に，$1/k=t_{i(1)}$ とすると，

$$[f_1]=[f_{1,0}][f_{2,0}]\cdots[f_{i(1),0}]$$

であって，f_1 は x_0 を基点とする $U_{\lambda(1)}$ 内の閉道だから，関係式 $R_{\lambda(1)}$ を用いて，$[f_{1,0}][f_{2,0}]\cdots[f_{i(1),0}]$ を $S_{\lambda(1)}$ の単語として表わせる．こうして関係式

$$\alpha_1{}^{\varepsilon(1)}=[f_1]=`[f_{1,0}]'\,`[f_{2,0}]'\cdots`[f_{i(1),0}]'$$

が得られ，これは関係式 $R_{\lambda(1)}$ の帰結である．同様にして，$\alpha_2{}^{\varepsilon(2)}, \alpha_3{}^{\varepsilon(3)}, \cdots, \alpha_k{}^{\varepsilon(k)}$ の関係式を得る．よって

$$\alpha=\alpha_1{}^{\varepsilon(1)}\alpha_2{}^{\varepsilon(2)}\cdots\alpha_k{}^{\varepsilon(k)}=`[f_{1,0}]'\,`[f_{2,0}]'\cdots`[f_{m,0}]'$$

は，R_1 および R_2 の帰結の関係式となる．これを書き直して

$$\alpha=(`[g_{0,1}]'\,`[f_{1,1}]'[\bar{g}_{1,1}]')(`[g_{1,1}]'\,`[f_{2,1}]'\,`[\bar{g}_{2,1}]')$$
$$\cdots(`[g_{m-1,1}]'\,`[f_{m,1}]'\,`[\bar{g}_{m,1}]')$$

としても，R_1 と R_2 の帰結の関係式である．括弧の位置を変えると，

$$\alpha=(`[g_{0,1}]')`[f_{1,1}]'(`[\bar{g}_{1,1}]'\,`[g_{1,1}]')`[f_{2,1}]'(`[\bar{g}_{2,1}]'\,`[g_{2,1}]')$$
$$\cdots(`[\bar{g}_{m-1,1}]'\,`[g_{m-1,1}]')`[f_{m,1}]'(`[\bar{g}_{m,1}]')$$

となる.

ここで，$g_{0,1}=g_{m,1}=\varepsilon_{x_0}$ だから，'$[g_0, 1]$'$=1$ および '$[g_{m,1}]$'$=1$ は自明な関係式である．'$[\bar{g}_{j,1}]$' および '$[g_{j,1}]$' が共に S_1 または S_2 の単語として表わされていれば，関係式

$$`[\bar{g}_{j,1}]'\,`[g_{j,1}]' = 1$$

もまた自明である．しかしながら，もし $g_{j,1}$ が $U_1 \cap U_2$ 内の道ならば，'$[\bar{g}_{j,1}]$'，'$[g_{j,1}]$' の内1つは S_1 の単語として表わされ，他の1つは S_2 の単語として表わされている可能性がある．この場合は関係式 '$[\bar{g}_{j,1}]$''$[g_{j,1}]$'$=1$ は関係式 R_s の帰結である．こうして関係式 R_1, R_2 および R_s の帰結として，関係式

$$\alpha = `[f_{1,1}]'\,`[f_{2,1}]'\cdots`[f_{m,1}]'$$

を得る．

この手順を繰り返すことによって，指定された関係式の帰結として，関係式

$$\alpha = `[f_{1,n}]'\,`[f_{2,n}]'\cdots`[f_{m,n}]'$$
$$= `[\varepsilon_{x_0}]'\,`[\varepsilon_{x_0}]'\cdots`[\varepsilon_{x_0}]'$$

に到達する．こうして，初めの関係式は指定された関係式の帰結である．よって，定理 24.2，従ってザイフェルト－ファン・カンペンの定理も証明された．▌

以下に述べる系に基づいてなされるような例以外の，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理に関する計算は，次章まで残しておく．

24.3 系

$U_1 \cap U_2$ が単連結ならば，$\pi(X, x_0)$ は $S_1 \cup S_2$ で生成され，関係式が $R_1 \cup R_2$ であるような群である．

証明は明白である．

この系を用いる例として，8の字に注目する：つまり，X は $\boldsymbol{R}^2$ の部分空間で，

$$C_1 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,;\, (x-1)^2 + y^1 = 1\} \text{ および}$$
$$C_2 = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \,;\, (x+1)^2 + y^2 = 1\}$$

として，$C_1 \cup C_2$ から成るものとする；図 24.2 参照

系を適用するために，X が道連結開集合 U_1, U_2 で $U_1 \cap U_2$ が単連結であるようなものの和となっていることを示す必要がある．従って $x_1=(-2,\ 0), x_2=$

(2, 0) として，$U_1 = X - \{x_1\}$，および $U_2 = X - \{x_2\}$ とおく．明らかに U_1 および U_2 は共に開かつ道連結であり，また $U_1 \cap U_2 = X - \{x_1, x_2\}$ は道連結である．更に，$U_1 \cap U_2$ は $\{x_0\}$ とホモトピー同値だから単連結である；実際 $\{x_0\}$ は $U_1 \cap U_2$ の強変形レトラクトである(第13章の終わりを見よ)．従って，系24.3が適用される．$j=1, 2$，について U_j と C_j は x_0 を止めてホモトピー同値である(実際，再び C_j は U_j の強変形レトラクトである)．よって，$\pi(U_j, x_0)$ は階数1の自由群であり，従って系24.3により，8の字の基本群は，階数2の自由群である．

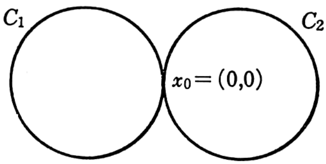


図 24.2

この結果を n 個の円周を1点で結んだものに対して一般化するのは難しい事ではない．その基本群は階数 n の自由群となる．証明は(簡単な)練習問題として残しておくことにする．

24.4　練習問題

(a)　X_n を n 個の円周の和で(どの2つ，或いはそれ以上の円周も)1点で交わるものとする．$\pi(X_n, x_0)$ は階数 n の自由群であることを証明せよ(帰納法？)．

(b)　X を次のような $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合とする：

$$X = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 ; -1 \leq x, y \leq 1 \text{ かつ } x \in \boldsymbol{Z} \text{ または } y \in \boldsymbol{Z}\}$$

X の基本群を決定せよ．

(c)　Y を次のような $\boldsymbol{R}^2$ の部分集合の補集合とする：

$$\{(x, 0) \in \boldsymbol{R}^2 ; x \in \boldsymbol{Z}\}$$

$\pi(Y, (1, 1))$ は階数が可算無限の自由群であることを証明せよ．

(d)　X をハウスドルフ空間で，$X = A \cup B$，但し A, B は各々トーラスに同相であり，$A \cap B = \{x_0\}$ であるとする．$\pi(X, x_0)$ を計算せよ(ヒント：$x_0 \in A$ に対して，x_0 の A に於ける可縮な近傍 C_A を見出し，$U_1 = B \cup C_A$ とせよ．同様に，C_B を x_0 の B に於ける可縮近傍として，$U_2 = A \cup C_B$ とせよ)．

(e)　X を $S^{n-1} \times \boldsymbol{R}$ から互いに交わらない k 個の，各々開 n−1 円板 D^n と同

相な部分集合を取り除いて得られる空間とする．Xの基本群は何か？

(f) $X=\{(x,y)\in \boldsymbol{RP}^n\times\boldsymbol{RP}^n\ ;\ x=x_0$ 又は $y=x_0\}$，但し x_0 は $\boldsymbol{RP}^n$ の或る定点とする（X は $\boldsymbol{RP}^n$ の２つのコピーを，１点 x_0 で同一視したものである）．$\pi(X,x_0)$ を計算せよ．この群は有限か？

(g) $X=U_1\cup U_2$ とし，U_1, U_2 は共に開かつ道連結であり，$U_1\cap U_2$ は空でなく，道連結とする．$\varphi_1: U_1\cap U_2\to U_1$ および $\psi_1: U_1\to X$ を包含写像とする．U_2 が単連結ならば，$\psi_{1*}:\pi(U_1,x_0)\to\pi(X,x_0)$ は全射準同型であることを証明せよ．

更に，ψ_{1*} の核は，像 $\varphi_{1*}\pi(U_1\cap U_2,x_0)$ を含む $\pi(U_1,x_0)$ の最小の正規部分群であることを証明せよ．

(h) $X=U_1\cup U_2$ で，U_1, U_2 および $U_1\cap U_2$ が空でない開道連結部分空間であるとする．U_2 および $U_1\cap U_2$ が単連結であるならば，U_1 および X の基本群は同型であることを証明せよ．

(i) K を $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト部分集合で，$\boldsymbol{R}^n-K$ が道連結であるものとする．$h:\boldsymbol{R}^n\to S^n-\{(1,0,0,\cdots,0)\}$ を次で定まる同相写像とする．

$$h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(\|x\|^2-1,2x_1,2x_2,\cdots,2x_n)\left(\frac{1}{1+\|x\|^2}\right)$$

$x_0\in\boldsymbol{R}^n-K$ とするならば，$\pi(\boldsymbol{R}^n-K,x_0)$ は $\pi(S^n-h(K),h(x_0))$ に同型であることを証明せよ（ヒント：或る k に対して，$K\subseteq B_k(0)$ である．$U_1=h(\boldsymbol{R}^n-K)$，$U_2=h(\boldsymbol{R}^n-B_k(0))\cup\{(1,0,\cdots,0)\}$ として，上の (h) を用いよ．

(j) X をトーラスから１点を取り除いたものとする．X の基本群は階数２の自由群であることを示せ．

(k) $y\in\boldsymbol{RP}^2$ として，$\boldsymbol{RP}^2-\{y\}$ の基本群は $\boldsymbol{Z}$ に同型であることを示せ．

(l) Y_n を次のような $\boldsymbol{C}$ の部分空間とする；

$$Y_n=\left\{z\in\boldsymbol{C}\ ;\ |z-j+1/2|=\frac{1}{2},\ j=1,2,\cdots,n\right\}$$

但し，n は或る正の整数とする．$\pi(Y_n,0)$ を計算せよ．

25

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理：Ⅲ 計算

この章では，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を用いて，種々の位相空間の基本群を計算する．初めの3つの例は，既に異なったやり方で(練習問題または系として)計算されている．

まず，トーラス T の基本群が $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ に同型であることを示すことから始める．T を図25.1(*b*)のように，矩形の領域の辺を同一視したものと考える．同一視される辺を a_1 および a_2 とする．

y を図25.1(*c*)に示されているように，矩形領域の内部の或る点とする．$U_1=T-\{y\}$ および $U_2=T-(a_1\cup a_2)$ とする．即ち，U_2 は矩形領域の内部である．明らかに，U_1 および U_2 は共に開かつ道連結であり，$U_1\cap U_2$ もそうである．よって，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用できる．x_0, x_1 を図25.1(*c*)に示された点とする(図の中に x_1 が4つあるが，これら4つの点は同一視されて T の中では1点となることに注意しよう)．最後に，c を，y を中心として x_0 を通る円周とし，d を図25.1(*c*)に示されているような x_0 から x_1 への線分とする．

矩形領域の‘辺’(図25.2(*a*))は同一視されて T の中で8の字となる(図25.2(*b*)；(*a*)も参照)．これは明らかに U_1 の強変形レトラクトである．

α_1 および α_2 で，各々 a_1 および a_2 を図に示した方向に1回廻るような，x_1 を基点とする U_1 内の閉道を表わすことにすると，$\pi(U_1,x_1)$ は $[\alpha_1],[\alpha_2]$ を生成元とする自由群である．$[\alpha_1]$ および $[\alpha_2]$ は1意的に定まることに注意しよう．δ で d に対応する，x_0 から x_1 への U_1 内の道(即ち，$\delta: I\to d$ は同相写像)を表わすことにすると，$\pi(U_1,x_0)$ は $[\delta*\alpha_1*\bar{\delta}],[\delta*\alpha_2*\bar{\delta}]$ (各々 A_1, A_2 と略記す

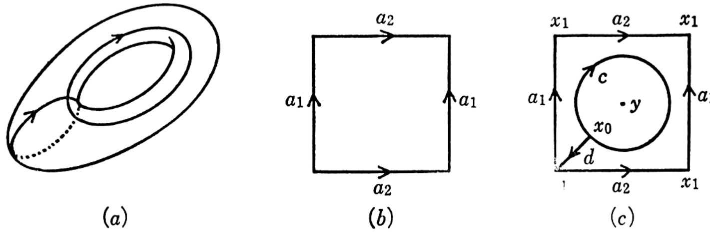


図 25.1

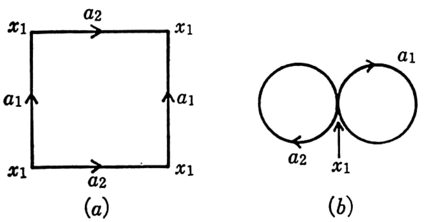


図 25.2

る）を生成元とする自由群である．

一点から成る空間 $\{x_0\}$ は U_2 の強変形レトラクトであり，従って $\pi(U_2, x_0)=1$ である．空間 $U_1\cap U_2$ については，円周 c が $U_1\cap U_2$ の強変形レトラクトである．従って，γ で円周 c を，図 25.1(c) に示された方向に 1 回回る，x_0 を基点とする $U_1\cap U_2$ 内の閉道を表わすことにすると，$\pi(U_1\cap U_2, x_0)$ は $[\gamma]$ によって生成される自由群である．

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理によって，$\pi(T, x_0)$ は $\{A_1, A_2\}$ によって生成され，次の関係式に従う．

$$\text{‘}\varphi_{1*}[\gamma]\text{’} = \text{‘}\varphi_{2*}[\gamma]\text{’}.$$

今，U_1 内で

$$\begin{aligned}[\varphi_1\gamma] &= [\delta*\alpha_1*\alpha_2*\bar{\alpha}_1*\bar{\alpha}_2*\bar{\delta}] \\ &= [\delta*\alpha_1*\bar{\delta}][\delta*\alpha_2*\bar{\delta}][\delta*\bar{\alpha}_1*\bar{\delta}][\delta*\bar{\alpha}_2*\bar{\delta}]\end{aligned}$$

となり，従って ‘$\varphi_{1*}[\gamma]$’$=A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}$ となる．一方，‘$\varphi_{2*}[\gamma]$’$=1$ だから，$\pi(T, x_0)$ は表示 $(\{A_1, A_2\};\{A_1A_2A_1^{-1}A_2^{-1}\})$ を持つ群となり，従って $\pi(T, x_0)$ は $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$ に同型である．

次の例として，クラインの壺 K を考える．クラインの壺の基本群の計算の多くの部分はトーラスの場合と同様である．クラインの壺 K を図 25.3(a) のように表わし，図 25.3(b) のような記法を用いる．

$U_1=K-\{y\}$ および $U_2=K-(a_1\cup a_2)$ とする；すると $U_1, U_2, U_1\cap U_2$ はザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用するのに必要な条件を満足している．

矩形領域の‘辺’は，同一視の後に8の字になり(図25.4参照)，この8の字は U_1 の強変形レトラクトである．

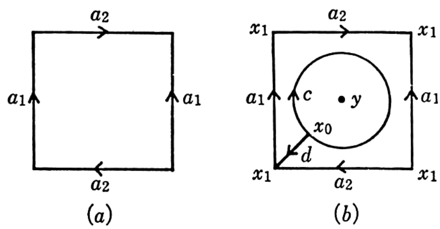


図 25.3

α_1, α_2 で各々 a_1, a_2 に対応する道を表わすとすると，$\pi(U_1, x_1)$ は $\{[\alpha_1], [\alpha_2]\}$ で生成される自由群となる．δ で d に対応する道を表わすとすると，$\pi(U_1, x_0)$ は $[\delta*\alpha_1*\bar{\delta}]$ および $[\delta*\alpha_2*\bar{\delta}]$ (これらを各々 A_1 および A_2 と略記する)で生成される自由群である．

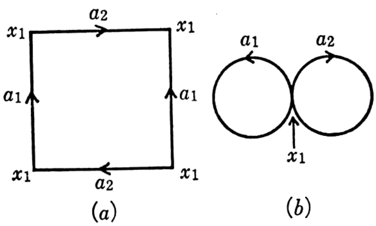


図 25.4

位相空間 U_2 は可縮だから，$\pi(U_2, x_0)=1$ である．最後に円周 c は $U_1 \cap U_2$ の強変形レトラクトであるから，c に対応する $U_1 \cap U_2$ 内の道，即ち c を図に示された方向に1回廻る道を γ とする時，$\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ は $[\gamma]$ で生成される自由群である．

U_1 の中で

$$[\varphi, \gamma] = [\delta*\alpha_1*\alpha_2*\bar{\alpha}_1*\alpha_2*\bar{\delta}]$$
$$= [\delta*\alpha_1*\bar{\delta}][\delta*\alpha_2*\bar{\delta}][\delta*\bar{\alpha}_1*\bar{\delta}][\delta*\alpha_2*\bar{\delta}]$$

となるから‘$\varphi_1*[\gamma]$’$=A_1A_2A_1^{-1}A_2$ となる．一方，‘$\varphi_2*[\gamma]$’$=1$ である．従ってザイフェルト－ファン・カンペンの定理より，直ちに $\pi(K, x_0)$ は群

$$\langle \{A_1, A_2\}\,;\{A_1A_2A_1^{-1}A_2\}\rangle$$

と同型であることがわかる(練習問題19.5(c)も参照)．

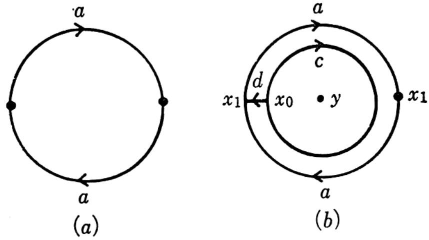


図 25.5

3番目の例として，実射影平面 $\boldsymbol{RP}^2$ の基本群が $\boldsymbol{Z}_2$ と同型であることを(再び)示す．$\boldsymbol{RP}^2$ を図25.5(a)のような等化空間と考える．x_0, x_1, y，c および d で，図25.5

(b)に示された点，円周，線分を表わすことにする．

$U_1=\boldsymbol{R}P^2-\{y\}$ および $U_2=\boldsymbol{R}P^2-a$ とすると，$U_1, U_2, U_1\cap U_2$ は，ザイフェルトーファン・カンペンの定理を適用するのに必要な条件を満足している．曲線 a は $\boldsymbol{R}P^2$ の中では円周であり，U_1 の強変形レトラクトである．よって，α を a に対応する U_1 内の道とするとき，$\pi(U_1, x_1)$ は $[\alpha]$ によって生成される自由群である．d に対応する x_0 から x_1 への道を δ で表わすとすると，$\pi(U_1, x_0)$ は $[\delta*\alpha*\bar{\delta}]$ で生成される自由群である．$[\delta*\alpha*\bar{\delta}]=A$ と書く．

部分空間 U_2 は点 x_0 へ可縮であり，よって $\pi(U, x_0)=1$ である．円周 c は $U_1\cap U_2$ の強変形レトラクトであるから，c に対応する x_0 を基点とした $U_1\cap U_2$ 内の道，即ち，c を図に示された方向に 1 回廻る道を γ で表わせば，$\pi(U_1\cap U_2, x_0)$ は $[\gamma]$ で生成される自由群である．ザイフェルトーファン・カンペンの定理より，$\pi(\boldsymbol{R}P^2, x_0)$ は生成元 A および関係式

$$`\varphi_1{}^*[\gamma]' = `\varphi_2{}^*[\gamma]'$$

を持つ群である．

U_1 内で

$$[\varphi_1\gamma] = [\delta*\alpha*\alpha*\bar{\delta}] = [\delta*\alpha*\bar{\delta}][\delta*\alpha*\bar{\delta}]$$

となるから，$`\varphi_1{}^*[\gamma]'=A^2$ となる．ところが $`\varphi_2{}^*[\gamma]'=1$ だから，$\pi(\boldsymbol{R}P^2, x_0)$ は群 $\langle\{A\};\{A^2\}\rangle$，即ち $\boldsymbol{Z}_2$ に同型である．

次の例として，X を n-多角形領域の全ての辺を図 25.6(a)に示されているように同一視して得られる位相空間とする．$n=2$ ならば X は $\boldsymbol{R}P^2$ であることに注意しよう．

図 25.6(b)のような記法を用いて，$U_1=X-\{y\}$ 及び $U_2=X-a$ とする．空間，$U_1, U_2, U_1\cap U_2$ は空ではなく，道連結である．多角形領域の辺は，X の中で円周 a となる．この円周は U_1 の強変形レトラクトであり，よって，α を a に対応する x_1 を基点とする閉道とするとき，$\pi(U_1, x_1)$ は $[\alpha]$ で生成される

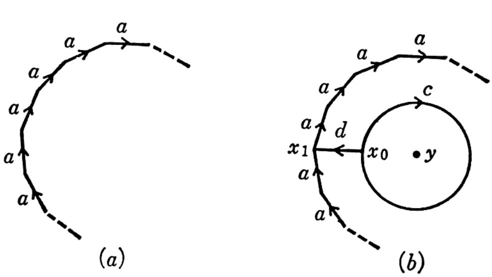


図 25.6

自由群である．δ を d に対応する x_0 から x_1 への道とすれば，$\pi(U_1, x_0)$ は $[\delta*\alpha*\bar{\delta}]=A$ で生成される自由群である．部分空間 U_2 は可縮だから $\pi(U_2, x_0)=1$ である．最後に円周 c は $U_1\cap U_2$ の強変形レトラクトであるから，c に対応する x_0 を基点とした $U_1\cap U_2$ 内の閉道を γ とするとき，$\pi(U_1\cap U_2, x_0)$ は $[\gamma]$ によって生成される自由群である．

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用して，$\pi(X, x_0)$ は1つの生成元 A および1つの関係式

$$`\varphi_1{}^*[\gamma]' = `\varphi_2{}^*[\gamma]'$$

を持つことが解る．簡単に解るように，

$$\begin{aligned}[\varphi, \gamma] &= [\delta*\underbrace{\alpha*\cdots*\alpha}_{n}*\bar{\delta}] \\ &= [\delta*\alpha*\bar{\delta}]^n\end{aligned}$$

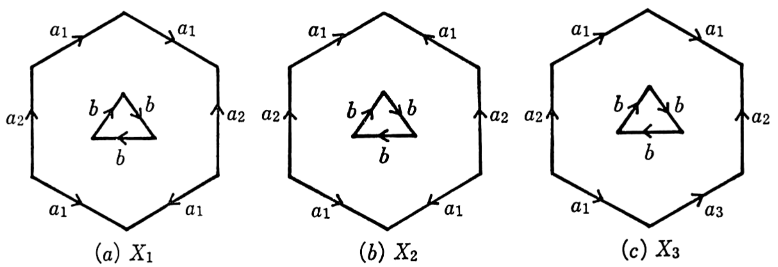


図 25.7

となるから，$`\varphi_{1*}[\gamma]'=A^n$ である．ところが，$`\varphi_{2*}[\gamma]'=1$ であるから，$\pi(X, x_0)$ は表示（$\{A\}$；$\{A^n\}$）を持つ．即ち，$\pi(X, x_0)$ は巡回群 $\boldsymbol{Z}_n$ に同型である．

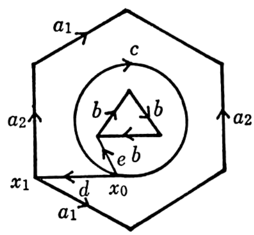


図 25.8

この章のこれ迄の例は，全て部分空間 U_2 が可縮であった．次の例は，そうでないものである．3つの位相空間を同時にみていくことにする．X_1, X_2, X_3 を図 25.7 に示されているような等化空間とする．X_3 では辺 a_3 が，他のどの辺とも同一視されないことに注意しよう．以後用いる記法を 25.8 に示しておく．

$i=1,2,3$ に対して，$U_{i,1}=X_i-b$ とする．$i=1,2$ に対して $U_{i,1}, U_{i,2}, U_{i,1}\cap U_{i,2}$ は全て $X_i(i=1,2,3)$ の道連結開集合である．図 25.9 は同一視した後の X_i

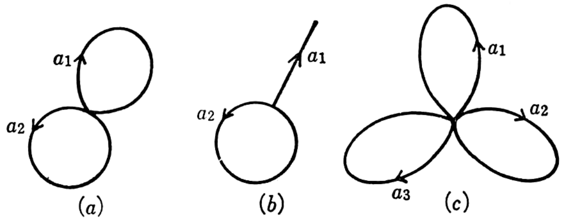


図 25.9

の‘外側の辺’を表わしている.

各々の場合，この‘辺’は $U_{i,1}$ の強変形レトラクトである．従って，$\pi(U_{i,1}, x_0)$ は以下の集合を生成元とする自由群であることを示すのは難しくない.

$\{A_1=[\delta*\alpha_1*\bar{\delta}],\ A_2=[\delta*\alpha_2*\bar{\delta}]\}$ 　　$i=1$ のとき，

$\{A_2=[\delta*\alpha_2*\bar{\delta}]\}$ 　　$i=2$ のとき，

$\{A_1=[\delta*\alpha_1*\bar{\delta}],\ A_2=[\delta*\alpha_2*\bar{\delta}],\ A_3=[\delta*\alpha_3*\bar{\delta}]\}$ 　　$i=3$ のとき，

但し，各々の場合，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ および δ の表わすものは，これ迄と同様である．$i=1,2,3$ について，$U_{i,2}$ は円周 b を含み，それは $U_{i,2}$ の強変形レトラクトである．よって，β および ε を各々 b および e に対応する道とすれば，$\pi(U_{i,2}, x_0)$ は 1 つの生成元 $B=[\varepsilon*\beta*\bar{\varepsilon}]$ で生成される自由群である.

$U_{i,1}\cap U_{i,2}$ 内の円周 c は，$U_{i,1}\cap U_{i,2}$ の強変形レトラクトであるから，$\pi(U_{i,1}\cap U_{i,2} x_0)$は 1 つの生成元$[\gamma]$で生成される自由群である.

$U_{i,1}$ の中で：

$i=1$ のとき，

$$[\varphi_1\gamma] = [\delta*\alpha_2*\alpha_1*\alpha_1*\bar{\alpha}_2*\alpha_1*\bar{\alpha}_1*\bar{\delta}] = A_2A_1{}^2A_2{}^{-1}.$$

$i=2$ のとき，

$$[\varphi_1\gamma] = [\delta*\alpha_2*\alpha_1*\bar{\alpha}_1*\bar{\alpha}_2*\alpha_1*\bar{\alpha}_1*\bar{\delta}] = 1.$$

$i=3$ のとき，

$$[\varphi_1\gamma] = [\delta*\alpha_2*\alpha_1*\alpha_1*\bar{\alpha}_2*\bar{\alpha}_3*\bar{\alpha}_1*\bar{\delta}] = A_2A_1{}^2A_2{}^{-1}A_3{}^{-1}A_1{}^{-1}$$

となる.

$U_{i,2}$ の中では，

$$[\varphi_2\gamma] = [\varepsilon*\beta*\beta*\beta*\bar{\varepsilon}] = B^3$$

となる.

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を用いて，X_i の基本群について，以下の結果を得る．

$$\pi(X_1, x_0) = \langle \{A_1, A_2, B\} ; \{A_2 A_1{}^2 A_2{}^{-1} = B^3\} \rangle$$
$$\pi(X_2, x_0) = \langle \{A_2, B\} ; \{B^3 = 1\} \rangle$$
$$\pi(X_3, x_0) = \langle \{A_1, A_2, B\} ; \varnothing \rangle.$$

最後の結果は，$A_2 A_1{}^2 A_2{}^{-1} A_1{}^{-1} = B^3$ となる必要十分条件が，$A_3 = A_1{}^{-1} B^{-3} A_2 A_1{}^2 A_2{}^{-1}$ となることであり，このことから群 $\langle \{A_1, A_2, A_3, B\} ; \{A_2 A_1{}^2 A_2{}^{-1} A_3{}^{-1} A_1{}^{-1} = B^3\} \rangle$ は，群 $\langle \{A_1, A_2, B\} ; \varnothing \rangle$ に同型になるからである．

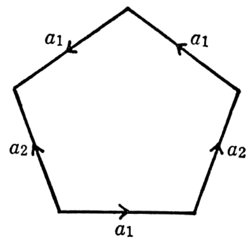


図 25.10

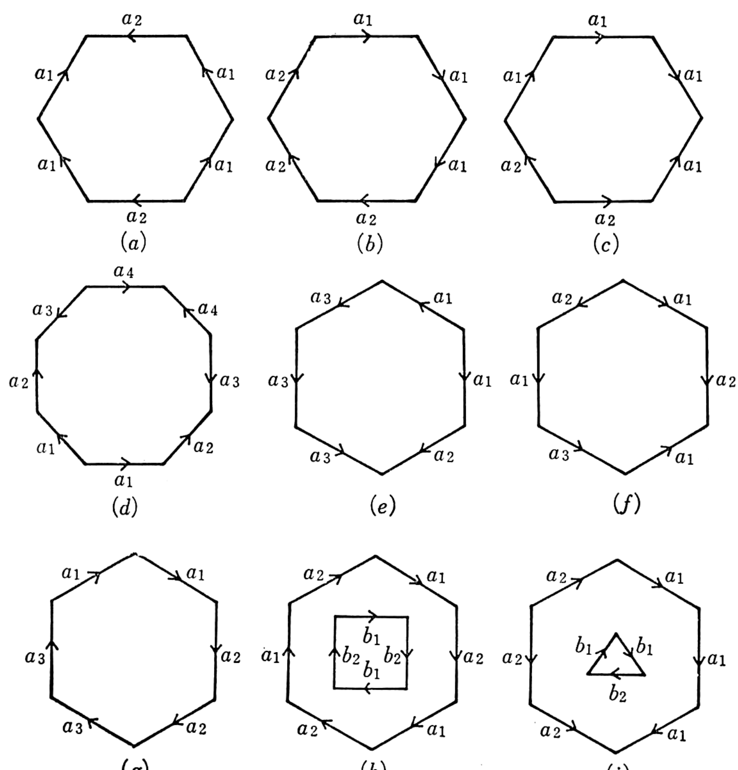


図 25.11

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を用いる他の計算は以下の章の中で与えられる．

25.1 練 習 問 題

(a) G を有限アーベル群とする．その基本群が G と同型であるような位相空間 X_G が存在することを示せ（練習問題 19.5(*b*) も参照）．

(b) 位相空間 X は，五角形領域をその辺を図 25.10 に示したように同一視して得られるものとする．X の基本群を計算せよ．

(c) $\boldsymbol{R}^3$ の部分集合 W が，開円板 $\mathring{D}^2$ と同相であるならば，W はそれに含まれるいかなる点の $\boldsymbol{R}^3$ に於ける開近傍にはならないことを証明せよ（ヒント：もし W が，$w\in W$ の $\boldsymbol{R}^3$ に於ける開近傍であるならば，定義より，部分集合 $U_1\subseteq W$ で，$w\in U_1$ 及び $U_1\cong\mathring{D}^3$ となるものが存在する）．

(d) X をダブル・トーラス，即ち図 11.7(*e*) に描かれたような $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間とする．X の基本群を計算せよ．

(e) D_1, D_2 を 2 つの 2-円板とし，各々 S_1, S_2 をそれらの境界円周とする．位相空間 X が D_1 と D_2 から，S_1 上の点 $\exp(2\pi it)\in S_1$ を，S_2 上の点 $\exp(2\pi int)\in S_2$ と同一視して得られるとする．但し，n は或る正整数（定数）とする．X は単連結であることを証明せよ．

(f) 図 25.11 に描かれた各々の等化空間の基本群を計算せよ．

26

曲面の基本群

今迄学んだことから，曲面の基本群を計算することができる．11章で示したように，どんな曲面も球面とトーラスと実射影平面とを連結和することによって得られる．また，トーラスの基本群は，2つの生成元 c_1, d_1 と1つの関係式 $c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}=1$ で表示される群であり，実射影平面の基本群は，1つの生成元 f_1 と，1つの関係式 $f_1^2=1$ で表示される群であった．ここでは一般の曲面に対して次を示す．

26.1 定　理

$$S = S^2 \# mT \# n\boldsymbol{R}P^2$$

なる曲面 S の基本群は，生成元

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots c_m, d_m, f_1, f_2, \cdots f_n$$

と1つの関係式

$$c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}d_2^{-1}\cdots c_md_mc_m^{-1}d_m^{-1}f_1^2f_2^2\cdots f_n^2 = 1$$

で表示される群である．

証明　X を球面から $m+n=q$ 個の互いに交わらない開円板を取り除いたもの，$H_1, H_2, \cdots, H_m$ をハンドル(即ち，トーラスから1つの開円板を取り除いたもの)，$M_1, M_2, \cdots M_n$ をメービウスの帯(即ち，実影影平面から1つの開円板を取り除いたもの)とすると，

$$S = X \cup H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_m \cup M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$$

と書き換えることができる．X の q 個の境界円周を，$b_1, b_2, \cdots, b_q$ で表わすと，

$$X \cap H_i = b_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$

$$X \cap M_j = b_{m+j} \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

となっている.

X は円板 D^2 から $q-1$ 個の開円板を取り除いたものと同相であることに注意する. x_0 を図 26.1 に示すように, X の内部の点とする. また, 図 26.1 に示すように, $x_1, x_2, \cdots, x_q$ を $b_1, b_2, \cdots, b_q$ 上の点とし, $a_1, a_2, \cdots, a_q$ を x_0 と各々, $x_1, x_2, \cdots, x_q$ を結ぶ曲線とする.

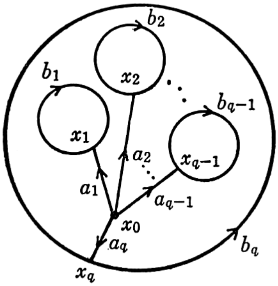


図 26.1

$a_1, a_2, \cdots a_{q-1}$ と $b_1, b_2, \cdots, b_{q-1}$ とから成る X の部分空間は X の強変形レトラクトである. よって, その基本群は $q-1$ 個の生成元に関する自由群であることが示される(実際, $a_1, a_2, \cdots, a_{q-1}$ を x_0 に縮めれば, X は, 1 点のみを共有する $q-1$ 個の円周と, $\{x_0\}$ を動かさずにホモトピー同値であることが解る). $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q$ を, 各々, $a_1, a_2, \cdots, a_q$ に対応する, x_0 と x_i を結ぶ X の道とし, $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_q$ を $b_1, b_2, \cdots, b_q$ に対応する, $x_1, x_2, \cdots, x_q$ を基点とする X の閉道とすれば, $\pi(X, x_0)$ は

$$B_1 = [\alpha_1 * \beta_1 * \bar{\alpha}_1], \ B_2 = [\alpha_2 * \beta_2 * \bar{\alpha}_2], \cdots, B_{q-1} = [\alpha_{q-1} * \beta_{q-1} * \bar{\alpha}_{q-1}]$$

で生成される自由群である.

$[\alpha_q * \beta_q * \bar{\alpha}_q]$ を B_q で表わすと,

$$B_q{}^{-1} = B_1 B_2 \cdots B_{q-1},$$

即ち, $\quad B_1 B_2 \cdots B_{q-1} B_q = 1$

である.

従って, $\pi(X, x_0)$ は, 生成元 $B_1, B_2, \cdots, B_q$ と 1 つの関係式 $B_1, B_2, \cdots B_q = 1$ で表示される群であるとも言える. この定式化は後で役立つ.

もし, 例えば, $x_i (i=1, 2, \cdots, q)$ を基点として取ると, $\pi(X, x_i)$ は生成元 $h_i(B_1), h_i(B_2), \cdots, h_i(B_q)$ と 1 つの関係式 $h_i(B_1 B_2 \cdots B_q) = 1$ で表示される群である. 但し, $h_i : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_i)$ は, $h_i([\theta]) = [\bar{\alpha}_i * \theta * \alpha_i]$ で定義される同型である. $h_i(B_i) = [\beta_i]$ であることに注意する.

さて, ハンドル H_i を考察しよう. 前に計算したように, H_i の基本群は, 2 個の生成元で生成される自由群である. 図 26.2 のようにすると, $\pi(H_i, x_i)$ は,

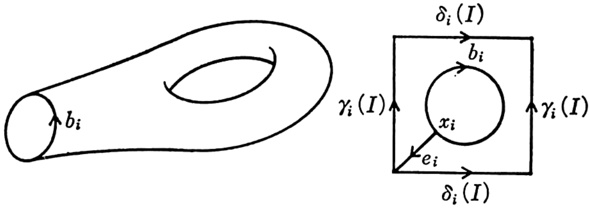


図 26.2

$C_i=[\varepsilon_i*\gamma_i*\bar{\varepsilon}_i]$ と $D_i=[\varepsilon_i*\delta_i*\bar{\varepsilon}_i]$ で生成される自由群である．但し，図に示す様に，ε_i は H_i の曲線 e_i に対応する道であり，γ_i, δ_i は H_i の閉道である．

b_i に対応する閉道 β_i は，C_i と D_i により

$$[\beta_i] = C_iD_iC_i^{-1}D_i^{-1}$$

と表わされることに注意する．

次にメービウスの帯 M_j を考えよう．ε_{j+m} を図 26.3 の e_{j+m} に対応する道とし，φ_j を図 26.3 に示すような閉道とすると，M_j の基本群は 1 つの生成元

$$F_j = [\varepsilon_{j+m}*\varphi_j*\bar{\varepsilon}_{j+m}]$$

で生成される自由群である．$[\beta_{j+m}]=F_j^2$ となることに注意する．

S の基本群を計算するために，上の結果を帰納的につなぎ合わせていこう．S の部分空間 $X_0, X_1, \cdots, X_q$ を次のように定義する．

$$X_0 = X$$
$$X_i = X_{i-1} \cup H_i \qquad i = 1, 2, \cdots, m$$
$$X_{m+j} = X_{m+j-1} \cup M_j \qquad j = 1, 2, \cdots, n.$$

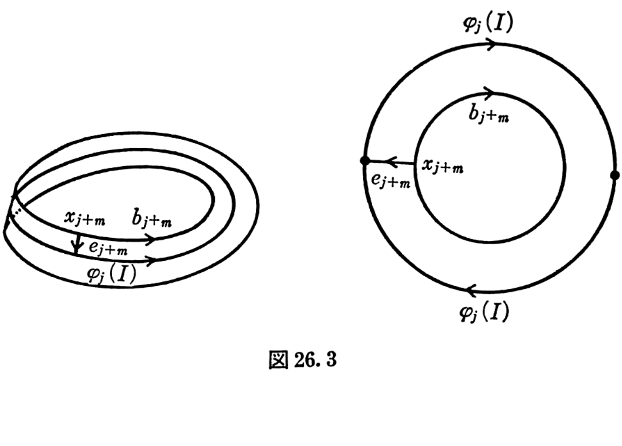


図 26.3

これらの空間 X_i, X_{m+j} の基本群が，各々次のようになることを示そう．即ち，

$\pi(X_i, x_0)$,　　$i = 0, 1, \cdots, m$ は生成元

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots, c_i, d_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \cdots, B_q$$

と1つの関係式

$$c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}d_2^{-1}\cdots c_id_ic_i^{-1}d_i^{-1}B_{i+1}B_{i+2}\cdots B_q = 1$$

で表示される群であり，

$\pi(X_{m+j}, x_0)$,　　$j = 0, 1, \cdots, n$ は生成元

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots, c_m, d_m, f_1, f_2, \cdots, f_j, B_{m+j+1}, B_{m+j+2}, \cdots, B_q$$

と1つの関係式

$$c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}d_2^{-1}\cdots c_md_mc_m^{-1}d_m^{-1}f_1^2f_2^2\cdots f_j^2B_{m+j+1}B_{m+j+2}\cdots B_q = 1$$

で表示される群である．

このことを証明するために，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を使うのであるが，そのためには，X_k を2つの開集合の和集合として表わさなければならない．ある i または j に対して，$Y_k = H_i$ または M_j とすれば，$X_k = X_{k-1} \cup Y_k$ となるが，残念ながら，これらの部分空間はどれも開集合ではない．しかし11章で示したように(連結和をとっているので)，$S^1\times(-1,1)$ に同相な，S に於ける b_k の開近傍 N_k で，$g_k : N_k \to S^1\times(-1,1)$ をその同相写像とすると，$g_k(b_k) = S^1\times\{0\}$ で

$$g_k^{-1}(S^1\times(-1,0]) \subseteq X \subseteq X_{k-1}$$

$$g_k^{-1}(S^1\times[0,1)) \subseteq Y_k$$

となるものが存在する．故に，

$$U_k = X_{k-1}\cup N_k \subseteq X_{k-1}\cup Y_k = X_k,$$

$$V_k = N_k\cup Y_k \subseteq X_{k-1}\cup Y_k \subseteq X_k$$

と定義する．

こうすれば，U_k と V_k は X_k の開かつ道連結な部分集合である．更に $U_k\cap V_k = N_k$ は道連結である．よって，$X_k = U_k\cup V_k$ と基点 $x_k \in b_k$ にザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用できる．勿論，X_{k-1}, Y_k, b_k は各々，$U_k, V_k, U_k\cap V_k$ の強変形レトラクトであるから，

$$\pi(U_k, x_k) = \pi(X_{k-1}, x_k)$$

$$\pi(V_k, x_k) = \pi(Y_k, x_k)$$
$$\pi(U_k \cap V_k, x_k) = \pi(b_k, x_k) = \langle \{[\beta_k]\} ; \varnothing \rangle$$

である．帰納法により，基本群 $\pi(X_k, x_0)$ を簡単に計算することができる．$\pi(X_1, x_0)$ を計算してみよう．まず，次が成り立つ．

$$\pi(U_1, x_1) = \pi(X, x_1) = \langle \{h_1(B_1), h_1(B_2), \cdots, h_1(B_q)\} ; \{h_1(B_1B_2\cdots B_q)=1\} \rangle.$$
$$\pi(V_1, x_1) = \pi(H_1, x_1) = \langle \{C_1, D_1\} ; \varnothing \rangle,$$
$$\pi(U_1 \cap V_1, x_1) = \pi(b_1, x_1) = \langle [\beta_1] ; \varnothing \rangle,$$

X に於て，$h_1(B_1)=[\beta]$ であり，H_1 に於て $[\beta_1]=C_1D_1C_1^{-1}D_1^{-1}$ であるから，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理により，$\pi(X, x_1)=\pi(U_1 \cup V_1, x_1)$ は生成元

$$C_1, D_1, h_1(B_1), h_1(B_2), \cdots, h_1(B_q)$$

と関係式

$$h_1(B_1B_2\cdots B_q) = 1$$
$$h_1(B_1) = C_1D_1C_1^{-1}D_1^{-1}$$

により表示される群である．生成元 $h_1(B_1)$ を消去すれば，$\pi(X_1, x_1)$ は生成元

$$C_1, D_1, h_1(B_2), h_1(B_3), \cdots, h_1(B_q)$$

と 1 つの関係式

$$C_1D_1C_1^{-1}D_1^{-1}h_1(B_2B_3\cdots B_q) = 1$$

で表示される群である．$c_1=h_1^{-1}(C_1)=[\alpha_1*\varepsilon_1*\gamma_1*\bar{\varepsilon}_1*\bar{\alpha}_1]$，$d_1=h_1^{-1}(D_1)=[\alpha_1*\varepsilon_1*\delta_1*\bar{\varepsilon}_1*\bar{\alpha}_1]$ とすれば，直ぐわかるように，$\pi(X_1, x_0)$ は生成元

$$c_1, d_1, B_2, B_3, \cdots, B_q$$

と 1 つの関係式

$$c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}B_2B_3\cdots B_q = 1$$

で表示される群である．

帰納法を，この先どのようにするかは明らかであろうから，それは読者に委ねる．

定理 26.1 に挙げた群に，どのような違いがあるかは，そのままでは直ぐには解らない．よってそれらの群を可換化してみる．そうすると，$G=\langle S_1;R \rangle$ のとき，G の可換化 AG は

$$AG = \langle S_1 ; R \cup \{xyx^{-1}y^{-1} ; x, y \in S_1\}\rangle,$$

即ち，全ての $x, y \in G$ に対して，$xy = yx$ という関係式を G に付け加えて得られる群である．

$n=0$，即ち，$S=S^2 \# mT$ と仮定する．すると，$A\pi(S, x_0)$ は，生成元

$$S_m = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots, c_m, d_m\}$$

と関係式 $\{r_m = 1\} \cup \{xy = yx ; x, y \in S_m\}$ で表示される群である．但しここで，

$$r_m = c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}d_2^{-1}\cdots c_md_mc_m^{-1}d_m^{-1}$$

である．特に，関係式 $c_id_i = d_ic_i$ であるから，関係 $r_m=1$ は，関係 $\{xy = yx ; x, y \in S_m\}$ の帰結である．従って，$A\pi(s, x_0)$ は群

$$\langle S_m ; \{xy = yx ; x, y \in S_m\}\rangle$$

であり，$A\pi(S, x_0) \cong \boldsymbol{Z}^{2m}$ であることが解る．

もし $n \geq 1$ ならば，$S=S^2 \# mT \# n\boldsymbol{R}P^2$ となるが，$A\pi(S, x_0)$ は，生成元

$$S_{m+n} = \{c_1, d_1, c_2, d_2, \cdots, c_m, d_m, f_1, f_2, \cdots, f_n\}$$

と関係式 $\{r_{m+n}=1\} \cup \{xy = yx ; x, y \in S_{m+n}\}$ とで表示される群である．但しここで

$$r_{m+n} = c_1d_1c_1^{-1}d_1^{-1}c_2d_2c_2^{-1}d_2^{-1}\cdots c_md_mc_m^{-1}d_m^{-1}f_1^2f_2^2\cdots f_n^2$$

である．関係 $r_{m+n}=1$ は関係 $\{xy = yx ; x, y \in S_{m+n}\}$ と $\{(f_1f_2\cdots f_n)^2 = 1\}$ との帰結である．更に，関係 $\{(f_1f_2\cdots f_n)^2=1\}$ は関係 $\{r_{m+n}=1\} \cup \{xy=yx ; x, y \in S_{m+n}\}$ の帰結である．よって

$$A\pi(S, x_0) = \langle S_{m+n} ; \{xy = yx ; x, y \in S_{m+n}\} \cup \{(f_1f_2\cdots f_n)^2 = 1\} \text{ である．}$$

かくして $A\pi(S, x_0)$ の任意の元は，$a(i), b(i), e(i)$ を適当な整数とすれば，

$$c_1^{a(1)}d_1^{b(1)}c_2^{a(2)}d_2^{b(2)}\cdots c_m^{a(m)}d_m^{b(m)}f_1^{e(1)}f_2^{e(2)}\cdots f_n^{e(n)}$$

と表わすことができる．これは，

$$c_1^{a(1)}d_1^{b(1)}c_2^{a(2)}d_2^{b(2)}\cdots c_m^{a(m)}d_m^{b(m)}f_1^{e(1)-e(n)}f_2^{e(2)-e(n)}\cdots$$
$$f_{n-1}^{e(n-1)-e(n)}(f_1f_2\cdots f_n)^{e(n)}$$

と書き換えることができるから，$A\pi(S, x_0) \cong \boldsymbol{Z}^{2m+n-1} \times \boldsymbol{Z}_2$ となることがわかる．

26.2 系

(i) 種数 $m (m \geq 0)$ の向き付け可能な曲面の基本群の可換化は $\boldsymbol{Z}^{2m}$ である．

(ii)　種数 $n(n\geq 1)$ の向き付け不可能な曲面の基本群の可換化は $\boldsymbol{Z}^{n-1}\times\boldsymbol{Z}_2$ である．

この系から，定理 11.3 の曲面の，どの 2 つを取ってきても，それらは同相でないことが証明される．

次の結果は，曲面と基本群に関する基礎的な結果である．

26.3　系

2 つの曲面が同相であるための必要十分条件は，それらの基本群が同型となることである．

これは，曲面の分類定理(11 章)と系 26.2 から解る．

次のことも示される．

26.4　系

曲面が単連結であるための必要十分条件は，それが球面 S^2 と同相なことである．

系 26.2 は，ある 2 次元空間が曲面かどうかを判定する方法にもなる．即ち，

26.5　系

X を 2 次元空間とし，$x_0\in X$ とする．$A\pi(X,x_0)$ が $\boldsymbol{Z}^{2m}$ でも $\boldsymbol{Z}^{n-1}\times\boldsymbol{Z}_2$ でもなければ，X は曲面ではない．

11 章で，曲面を，多辺形の商空間として表わせることを示した．このことを使って，曲面の基本群を計算することは，読者の練習問題として残しておこう．

26.6　練 習 問 題

(a)　M を，$4m$ 多角形領域 $(m\geq 1)$ から，図 26.4 (a) に示すように，辺を同一視して得られる商空間，即ち，種数 m の向き付け可能な曲面とする．M の基本群が，生成元

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \cdots, A_m, B_m$$

と，1 つの関係式

$$A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1}A_2B_2A_2^{-1}B_2^{-1}\cdots A_mB_mA_m^{-1}B_m^{-1}=1$$

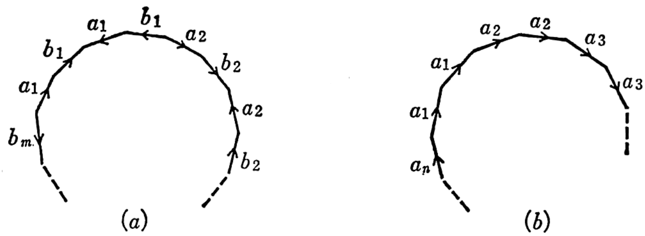


図 26. 4

で表示される群であることを(ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を使って)直接証明せよ.

(b) Mを，$2n$ 多角形領域 $(n \geq 1)$ から，図 26. 4 (b) に示すように，辺を同一視して得られる商空間，即ち，種数 n の向き付け不可能な曲面とする. M の基本群が生成元

$A_1, A_2, \cdots, A_n$

と 1 つの関係式

$A_1{}^2 A_2{}^2 \cdots A_n{}^2 = 1$

で表示される群であることをザイフェルト－ファン・カンペンの定理を使って直接証明せよ.

(c) M_1, M_2 を連結な n-次元多様体 $(n>2)$ とすれば，$M_1 \# M_2$ の基本群は，群 $\langle S_1 \cup S_2 ; R_1 \cup R_2 \rangle$ と同型になることを証明せよ．但し，$i=1,2$ に対して M_i の基本群を $\langle S_i ; R_i \rangle$ とする.

(d) G_n を n 個の生成元から成る自由群とすると，G_n を基本群とする，4-次元多様体 M_n が存在することを示せ(ヒント：M_1 をまず見つけよ).

27

結び目：I　背景とトーラス結び目

結び目(knot)とは，円周 S^1 と同相な $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間のことである．図 27.1 にそのいくつかの例を挙げた．図 27.1 に挙げた空間は，(定義から，皆円周に同相であるから)全て互いに同相であるが，直感的には，$\boldsymbol{R}^3$ の中でそれらは同じではない．例えば，もし紐で，結び目の模型を作ってみると，この 3 次元の世界では，図 27.1 の結び目 (a) から，紐のどこも切らないで，結び目 (c) を作ることはできない．これは，結び目 (a) は'結ばれていない'が，結び目 (c) は'結ばれている'からである．3 次元空間の中で，ある結び目を連続的に動かして，図 27.1 の (a) にすることができるとき，その結び目は'結んでいない'と言って良いだろう．これは，結び目を連続的に動かすばかりでなく，回りの 3-次元空間も連続的に動かすことも示している．従って，次のように定義することができる．結び目 K が**自明**(結んでいない：unknotted)であるとは，同相写像 $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ で，$h(K)$ が $\boldsymbol{R}^2\subset\boldsymbol{R}^3$ の標準的な円周 $\{(x,y,0)\in\boldsymbol{R}^3\,;\,x^2+y^2=1\}$ となるものが存在するときを言う．よって，図 27.1 の結び目 (a) と (b) は自明であり，他は自明でない．そのことは，少なくとも，実際に実験してみる限り，或いは，直感的にはそうである．この後，この章で，図 27.1 の結び目 (c), (d), (g) が自明でないことを証明する．次の章で，図 27.1 の残りの結び目も自明でないことが証明できるようになるだろう．

ところで，読者は，何故結び目を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間として定義するかと疑問に思うことだろう(それは，我々が 3 次元の世界に住んでいるようだからということだけによるのだろうか?)．何故，結び目 K を S^1 に同相な $\boldsymbol{R}^n$ の部分空間として定義しないのだろうか？　明らかに，n は少なくとも 2 以上でなければ

ならない(何故？—系 10.3！). しかし，$n \neq 3$ とすると，同相写像 $h: \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^n$ で $h(K)$ が $\boldsymbol{R}^n$ の標準的な円周となるものが存在する．このことは証明しない．$n=2$ に対しては，これは有名な Schönflies の定理である．$n \geq 4$ に対しては，これは，もし我々が 4 次元(或いはそれより多くの次元)の空間に住んでいるとしたら，全ての結び目をほどいてしまうことができると主張しているのである．

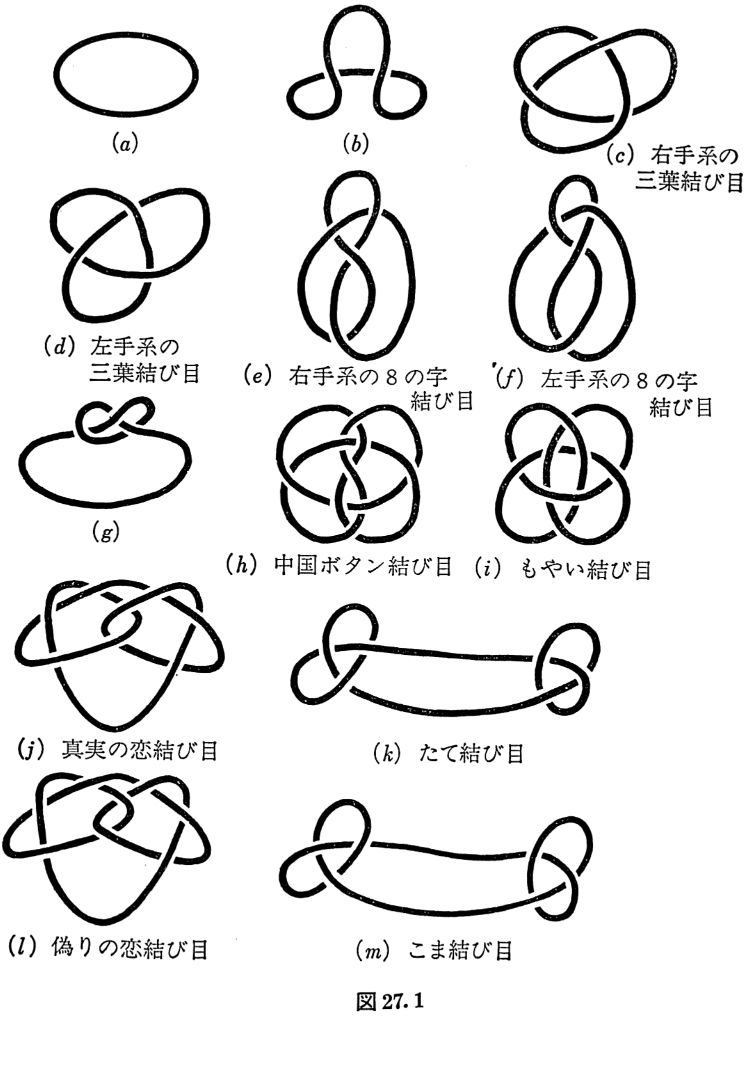


図 27.1

これは直観的には明らかに思える．即ち，余分な次元が，紐の一部分が他の部分を“通り抜ける”余地を与えるのである．これらのことから，結び目を S^1 の同相写像の $\boldsymbol{R}^3$ の中の像として定義した理由が解るだろう．また，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の中の S^{n-1} に同相な部分空間を考えることもできる．このことは意味があるし，色々数学的に興味深いこともあるが，この本で取り扱う範囲外のことである．

話を（$\boldsymbol{R}^3$ の）結び目に戻そう．結び目が自明であるとは，何を意味するかは既に定義した．より一般に，2つの結び目 K_1, K_2 が**同型**(similar)であるとは，同相写像 $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ で，$h(K_1)=K_2$ となるものが存在するときを言う．例えば図27.1の結び目 (a) と (b) は同型，(c), (d), (g) は同型，(e) と (f) は同型，等である．(a) と (b) が同型であることは明らかであり，(g) と (c) が同型であることも直ぐ解る．(c) と (d) が同型であることを確かめるために，一方を他方の真上に置く．2つの間に一枚の鏡を置くと，それが要求される $\boldsymbol{R}^3$ の同相写像を与える．同様の同相写像は (e) と (f) が同型となることを示すのにも使える．結び目 (e) と (f) が同型であるのを示すのは，もう一つの方法がある．それは，図27.2のように，順に図を描いてみるのである．読者は，図27.1の結び目 (e) を，紐で作ってみて図27.2に描いてある結び目を，それから順に作っていってみるとよい．

しかし，実際に実験すると，左手系の三葉結び目(left hand trefoil knot)と右手系の三葉結び目(right hand trefoil knot)（図27.1(c), (d)）は，3次元空間

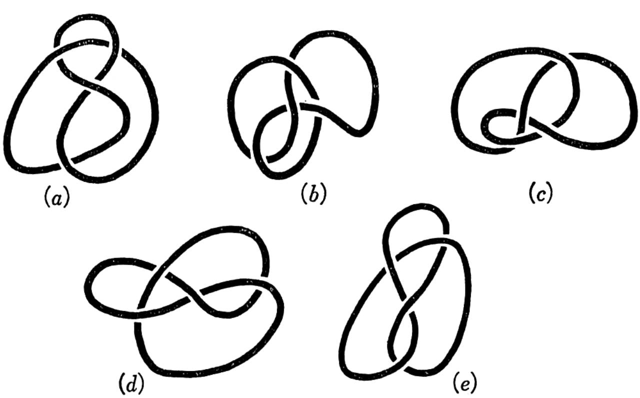


図27.2

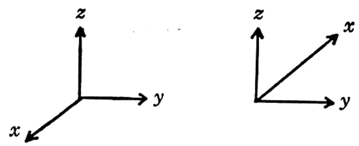


図 27.3

の中で，左手系の三葉結び目から，右手系の三葉結び目を作ることができないという意味で，同じではない(実際にやってみよ)．実際，一方から他方を得るためには，一枚の鏡が必要である．一枚の鏡は $\boldsymbol{R}^3$ の“右手系座標”を“左手系座標”に写し(図 27.3)，$\boldsymbol{R}^3$ の中では，右手系座標を左手系座標に写す方法は他に無い．

同相写像 $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ が右手系座標を右手系座標に写すとき，**向きを保つ** (orientation preserving) と言う．2 つの結び目 K_1 と K_2 が**同値** (equivalent) であるとは，向きを保つ同相写像 $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ で $h(K_1)=K_2$ となるものが存在するときを言う．従って(少なくとも直観的には)左手系と右手系の三葉結び目は同値ではない．一方，左手系と右手系の 8 の字結び目は，図 27.2 に示すように同値である．結び目が同値であるという概念は，結び目が同じであるという自然な概念とうまく合っている．実際，2 つの結び目 K_1, K_2 が同値であるための必要十分条件は，同相写像 $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ と実数 $k>0$ とが存在して，$h(K_1)=K_2$ かつ $\|x\|\geq k$ ならば常に $h(x)=x$ となることであることが証明できる．この結果は強い物理的な内容を持つことであるが，これについて考えることを読者に委ねる．今述べたことは，今後証明もしないし，使うことも無い(簡単なことではない)．

27.1 練 習 問 題

(a) 結び目に於ける“同型”および“同値”という関係は，同値関係であることを示せ．

(b) $h:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}^3$ を線型写像(即ち，$\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}$, $a,b\in\boldsymbol{R}^3$ に対して，$h(\lambda a+\mu b)=\lambda h(a)+\mu h(b)$ となる写像)とするとき，h が向きを保つための必要十分条件は $\det h=+1$ となることを証明せよ．

(c) $\boldsymbol{R}^3$ の結び目 K が，$\boldsymbol{R}^3$ の標準的な円周に同値であるための必要十分条件は，K が $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な円周に同型であることを証明せよ(ヒント：標準的な円周は“対称”である)．

(d) 次のような結び目 K の例を(もし可能ならば)見つけよ．

(i) $K \subset S^2 \subset \boldsymbol{R}^3$

(ii) $K \subset$ トーラス $\subset \boldsymbol{R}^3$

(iii) $K \subset$ 二重トーラス $\subset \boldsymbol{R}^3$

(e) Kを，有限個，例えばk個の線分から成る$\boldsymbol{R}^3$の結び目とする．いかなるkの値$(1 \leq k \leq 10)$に対して，自明でない結び目Kが存在するか．

(f) $p: \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$を$\boldsymbol{R}^3$から$\boldsymbol{R}^2$の上への自然な射影(即ち，$p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \in \boldsymbol{R}^2 \subset \boldsymbol{R}^3$)とする．結び目$K$の**交叉点**(crossing point)とは，$x \in \boldsymbol{R}^2$で，$p^{-1}(x) \cap K$が2個以上の点から成るもののことである．$p^{-1}(x) \cap K$が2点から成るとき，xは**二重点**と言われる．結び目を少し動かして，その二重点をなくせるとき，その二重点は真の二重点ではないと言う．図27.4を参照せよ．

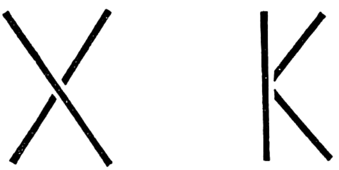


図27.4

交叉点が全て真の二重点である結び目を考える．交叉点が1個，2個，3個，4個，5個，6個のそのような結び目を全て挙げよ．

K_1とK_2が，同型な結び目とすると，$\boldsymbol{R}^3 - K_1$と$\boldsymbol{R}^3 - K_2$との間に同相写像が存在する．従って，同型な結び目の補集合の基本群は同型である．任意の点$x_0 \in \boldsymbol{R}^3 - K$をとり，$\pi(\boldsymbol{R}^3 - K, x_0)$を**結び目$K$の群**と言う．結び目が同値ではなくても同型であれば，その群は同型である．このことにより，同値な結び目ではなくて，同型な結び目を考察する理由が説明される．

27.2 定　理

自明な結び目の群は$\boldsymbol{Z}$に同型である．

証明　$K = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 ; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$を$\boldsymbol{R}^3$の標準的な円周とする．$\varepsilon > 0$を任意に小さい実数とし，$\boldsymbol{R}^3 - K$の部分空間$X, Y$を

$$X = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 ; x < \varepsilon\} \cap (\boldsymbol{R}^3 - K)$$

$$Y = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3 ; x > -\varepsilon\} \cap (\boldsymbol{R}^3 - K)$$

と定義する．部分空間

$$\{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3,\ x = 0,\ y \geq 0\} - \{(0, 1, 0)\}$$

が X と Y の強変形レトラクトであることは直ぐ解る．よって $\alpha_X : I \to X$ と $\alpha_Y : I \to Y$ を

$$t \to (0, 1-\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t))$$

で定義される道とし，0 を $\boldsymbol{R}^3$ の原点とすると，基本群 $\pi(X, 0)$, $\pi(Y, 0)$ は共に各々，$[\alpha_X]$, $[\alpha_Y]$ を生成元とし，$\boldsymbol{Z}$ に同型である．

部分空間

$$\{(x, y, z) : x=0\} - \{(0, 1, 0),\ (0, -1, 0)\}$$

は $X \cap Y$ の強変形レトラクトであるから，$\pi(X \cap Y, 0)$ は

$$\beta_1(t) = (0, 1-\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t)),$$

$$\beta_{-1}(t) = (0, -1+\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t))$$

で定義される 2 つの生成元 $[\beta_1]$ と $[\beta_{-1}]$ により生成される自由群である．

$\varphi_X : X \cap Y \to X$, $\varphi_Y : X \cap Y \to Y$ を自然な包含写像とすると，

$$\varphi_X \beta_1 = \alpha_X, \qquad \varphi_Y \beta_1 = \alpha_Y,$$

$$\varphi_X \beta_{-1} \sim \alpha_X, \qquad \varphi_Y \beta_{-1} \sim \alpha_Y$$

となることは明らかである．

ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を使うための，$X, Y, X \cap Y$ に必要な条件は全てみたされているから，この定理を使うと，基本群 $\pi(\boldsymbol{R}^3 - K, 0)$ が，1 つの生成元 $[\alpha]$ で生成される自由群であることが示される．但しここで，$\alpha : I \to \boldsymbol{R}^3 - K$ は

$$\alpha(t) = (0, 1-\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t))$$

で与えられるとする．▌

次の目標は，全ての結び目が自明とは限らないことを示すことである．これを示すために，三葉結び目や，それと関係のある結び目の群を計算する．三葉結び目は，所謂，トーラス結び目と呼ばれる結び目の集団に属している．これは，$\boldsymbol{R}^3$ の中の標準的なトーラス上の単一閉曲線として表わされる結び目のことで，結び目の中では，1 つの大きな類をなしている．標準的なトーラスを，$0 \leq \varphi,\ \theta < 2\pi$ として，組 $(\exp(i\varphi),\ \exp(i\theta))$ によって与えられる点から成る $S^1 \times S^1$ と考える．$\boldsymbol{R}^3$ を $\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R}$ と考え，$\boldsymbol{C}$ の極座標 $(r, \theta) \equiv re^{i\theta}$ を使うと便利である．こうすると，$\boldsymbol{R}^3$ の点は 3 つ組 (r, θ, z) で表わされる．このようにすると，

$$f(\exp(i\varphi),\ \exp(i\theta)) = \left(1+\frac{1}{2}\cos\varphi,\ \theta,\ \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$$

で与えられる連続写像 $f: S^1\times S^1\to \boldsymbol{R}^3$ があって $S^1\times S^1$ は像 $f(S^1\times S^1)$ に同相である．図 27.5 および図 5.4 を参照せよ．

m, n を互いに素な正の整数の組とする．$K_{m,n}$ を

$$K_{m,n} = \{f(\exp(2\pi imt),\ \exp(2\pi int))\,;\, t\in I\}$$

なる $\boldsymbol{R}^3$ の中のトーラスの部分集合とする．

$$g(\exp(2\pi it)) = f(\exp(2\pi imt),\ \exp(2\pi int))$$

で定義される写像 $g: S^1\to K_{m,n}$ は同相写像であることが示され，$K_{m,n}$ は結び目である．$K_{m,n}$ のことを **(m,n) 型トーラス結び目**と言う．例えば，図 27.6 を見よ．トーラスには 2 つの標準的な円周がある．即ち，$f(\exp(2\pi it), 1)$ と $f(1, \exp(2\pi it))$ とで与えられるものである．(m, n) 型トーラス結び目は，円周 $f(\exp(2\pi it), 1)$ 方向に，トーラスを m 回，もう 1 つの標準的な円周の方向にトーラスを n 回廻っている．もし，トーラス T を商空間 $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ と考えると，$K_{m,n}$ は原点を通り，水平軸に対する傾きが，m/n の $\boldsymbol{R}^2$ の直線の T の中の像となる．

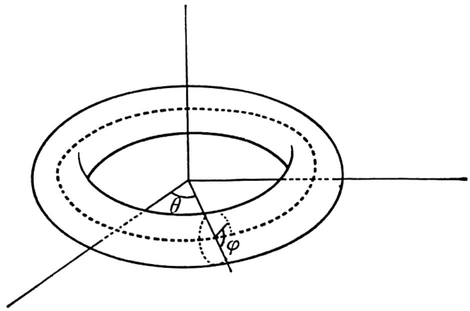


図 27.5

トーラス結び目 $K=K_{m,n}$ の群を計算するためには，K を少し太くすると便利である．a を $|(1/2)\sin(\pi/n)|$ より小さい正の実数とする．$0\leq b\leq a$ なる b に対して，K_b を次のような $\boldsymbol{R}^3(=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R})$ の部分集合とする．

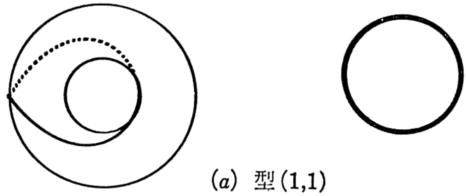
$$\left\{\left(x+1+\frac{1}{2}\cos(2\pi mt),\ 2\pi nt,\ y+\frac{1}{2}\sin(2\pi mt)\right);\right.$$
$$\left.0\leq t\leq 1,\ x^2+y^2\leq b^2\right\}.$$

$K_0=K$ であることは明らかである．一般に，$D_b=\{(x, y)\in\boldsymbol{R}^2\,;\,x^2+y^2\leq b^2\}$ とすると，

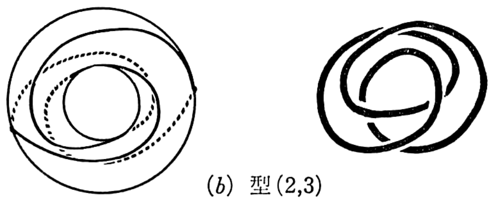
$$h(\exp(2\pi it),\ (x, y)) = \left(x+1+\frac{1}{2}\cos(2\pi mt),\ 2\pi nt,\ y+\frac{1}{2}\sin(2\pi mt)\right)$$

により与えられる同相写像

$$h: S^1\times D_b\to K_b$$



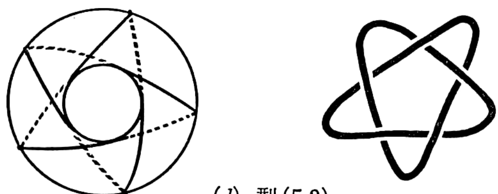
(*a*) 型(1,1)



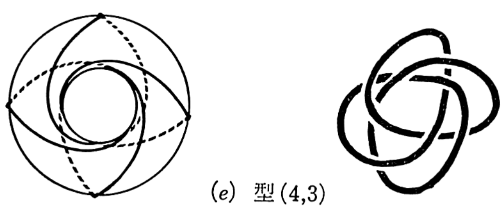
(*b*) 型(2,3)



(*c*) 型(3,2)



(*d*) 型(5,2)



(*e*) 型(4,3)

図 27.6

が存在する(写像 h は明らかに連続で，全射である．条件 $b\leq a<|(1/2)\sin\pi/n|$ は必要であるが，h が単射であることを示すのも難しくない．従って定理 8.8 により，h が同相写像であることが解る)．

$0\leq b<a$ なる各 b に対して，$\boldsymbol{R}^3-K$ と $\boldsymbol{R}^3-K_b$ が同相であることが示される．

27.3 定　理

a を正の実数とし，$0\leq b\leq a$ なる b に対して，同相写像 $h:S^1\times D_b\to K_b\subset\boldsymbol{R}^3$ が存在すると仮定する．$0\leq b<a$ ならば，$\boldsymbol{R}^3-K_b$ は $\boldsymbol{R}^3-K_0$ に同相である．

証明 $\varphi:\boldsymbol{R}^3-K_b\to\boldsymbol{R}^3-K_0$ を次のように定義する：もし，$x\notin\mathring{K}_a-K_b$ ならば，$\varphi(x)=x$ とする．$x\in K_a-K_b$ ならば，$b<r\leq a$ に対して，$x=h(z,r\exp(i\theta))$ と書けるが，このときは $\varphi(x)$ を $h(z,(r-b)(a/(a-b))\cdot\exp i\theta)$ と定義する．同様に，$\psi:\boldsymbol{R}^3-K_0\to\boldsymbol{R}^3-K_b$ を次のように定義する．$x\notin K_a-K_0$ ならば，$\psi(x)=x$ とする．$x\in K_a-K_0$ ならば，$0<r\leq a$ に対して，$x=h(z,r\exp(i\theta))$ と書けるが，$\psi(x)$ を $h(z,(r(a-b)/a+b)\cdot\exp(i\theta))$ として定義する．$\psi\varphi=1$，$\varphi\psi=1$，そして φ,ψ が連続であることを確かめることは読者に委ねる．

27.4 定　理

(m,n) 型トーラス結び目 K の群は，2 個の生成元 a,b と 1 個の関係 $a^n=b^m$ で表示される群である．

証明 $f:\boldsymbol{C}\times S^1\to\boldsymbol{R}^3(=\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R})$ を

$$(r\exp(i\varphi),\ \exp(i\theta))\to\left(1+\frac{1}{2}r\cos\varphi,\theta,\frac{1}{2}r\sin\varphi\right)$$

で定義する．

明らかに f は連続である．また，前に述べたように $f(S^1\times S^1)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の中のトーラスである．a を前のように $|(1/2)\sin(n/\pi)|$ より小さくとり，$\varepsilon>0$ を $2\varepsilon<a$ にとる．部分空間 X,Y を

$$X=\{f(r\exp(i\varphi),\exp(i\theta))\,;0\leq\varphi,\theta\leq 2\pi,0\leq r<1+\varepsilon\}-K_{2\varepsilon},$$

$$Y=\boldsymbol{R}^3-\{f(r\exp(i\varphi),\ \exp(i\theta))\ ;\ 0\leq\varphi,\ \theta\leq 2\pi,\ 0\leq r<1-\varepsilon\}-K_{2\varepsilon}$$

で定義する．こうすると，$X\cup Y=\boldsymbol{R}^3-K_{2\varepsilon}\cong\boldsymbol{R}^3-K$ である．$x_0\in X\cap Y$ とす

る.

$Z=\{f(0,\ \exp(i\theta))\ ;\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$ が X の強変形レトラクトであり，Y が $\boldsymbol{R}^3-Z$ の強変形レトラクトであることは直ぐ解る．図 27.7 には，θ を固定(例えば，$\theta=0$ と）した点で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ の半平面 H と各領域との共通部分が $(n=3$ の場合に)示されているので参考にせよ．勿論，Z は $\boldsymbol{R}^3$ の標準的な円周だから，$\pi(X, x_0)$ と $\pi(Y, y_0)$ は各々，1 つの生成元 $[\alpha], [\beta]$ で生成される自由群である．ここで，α は x_0 から，例えば弧 a_X に沿って円周 Z まで進み，Z を一周して，また a_X に沿って x_0 へ戻る X の閉道を表わしている．生成元 $[\beta]$ は，x_0 から弧 a_Y に沿って，円周

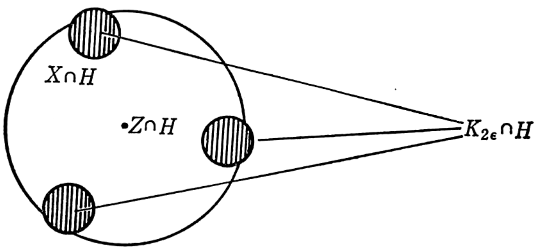


図 27.7

$$\left\{\left(1+\frac{3}{4}\cos(2\pi t),\ 0,\ \frac{3}{4}\sin(2\pi t)\right)\ ;\ t\in I\right\}$$

迄進み，この円周を 1 周して，再び a_Y に沿って x_0 へ戻る Y の閉道 β によって表わされている．

空間 $X\cap Y$ は，ちょうど

$$\{f(r\exp(i\varphi),\ \exp(i\theta))\ ;\ 0\leq\varphi, \theta\leq 2\pi,\ 1-\varepsilon<r<1+\varepsilon\}-K_{2\varepsilon}$$

であり，適当な δ を取れば(例えば $\delta=(1/2)n$ とすれば)，$X\cap Y$ の強変形レトラクトである部分空間

$$W=\{f(\exp(2\pi i(mt+\delta)),\ \exp(2\pi int))\ ;\ 0\leq t\leq 1\}$$

を含む(実際に，いくつかの例を自分で描いてみよ)．この部分空間 W は円周であるから，$\pi(X\cap Y, x_0)$ は 1 つの生成元 $[\gamma]$ で生成される自由群である．但しここで γ は，$(x_0\in W$ と選んでおけば)，W を 1 周する閉道である．

$\varphi_X: X\cap Y\to X$, $\varphi_Y: X\cap Y\to Y$ を自然な包含写像とする．このとき，

$$\varphi_{X*}[\gamma]=[\alpha]^n \text{ または } [\alpha]^{-n}$$

$$\varphi_{Y*}[\gamma] = [\beta]^m \text{ または } [\beta]^{-m}$$

となることが示され，α と(または)β を各々 $\bar{\alpha}$ と(または)$\bar{\beta}$ に置き換えれば，

$$\varphi_{X*}[\gamma] = [\alpha]^n,\quad \varphi_{Y*}[\gamma] = [\beta]^m$$

を得る．図 27.8 には $m=3$, $n=2$ の場合が描いてある．

$X, Y, X\cap Y$ はザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用するため必要な条件を満足しているので，これを使えば結論がでてくる．もし上で $\varepsilon=0$ とすると，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理は適用できないことに注意する．

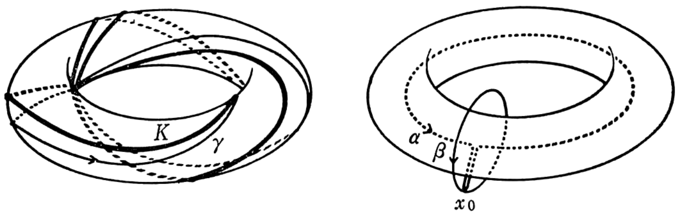


図 27.8

トーラス結び目の群を計算したが，それが自明かどうかは明らかではない．曲面に対しても同様な問題があったが，群を可換化することで解決した．しかしどんな結び目の群も可換化すると $\boldsymbol{Z}$ と同型になってしまう(トーラス結び目に対してこれをどう証明するかは練習問題 27.7(d)を見よ．一般には系 28.4 を見よ)．従って，トーラス結び目が結んでいるかいなかを決定するために，他の方法を探さなければならない．

27.5 補　　題

(3.2)型トーラス結び目は自明でない．

証明　この結び目の群は $G=\langle \{a, b\}\,;\{a^2=b^3\}\rangle$ である．G' を G にいくつかの関係を付け加えた

$$G' = \langle \{a, b\}\,; \{a^2=b^3,\ a^2=1,\ ab=b^{-1}a\}\rangle$$

として定義する．生成元 a を a, b を b に写す明らかな全射 $G\to G'$ が存在する．

G' が 3 文字の対称群と同型であるのを示すのは易しい．即ち，

$$G' = \{1, a, b, ab, b^2, ab^2\ ;\ ab=b^{-1}a\}$$

である．この群は非可換であり，アーベル群の準同型写像による像はアーベル群であるから，G 自身非可換であることを意味している．よって，G は $\boldsymbol{Z}$ に同型ではない．従って(3.2)型トーラス結び目が自明でないことが証明できた．▎

同じような議論は，他のトーラス結び目に対してもできるが，それらが自明な結び目でないことを示すに過ぎない．それより，トーラス結び目の内，どれが互いに同型になるかを知りたい．そうするためには，他の工夫が必要になってくる．

27.6　定　　理

$m, n, m', n' > 1$ に対して (m, n) 型，(m', n') 型の 2 つのトーラス結び目が同型であるならば，$\{m, n\} = \{m', n'\}$，即ち，$m = m'$ かつ $n = n'$，または $m = n'$，かつ $n = m'$ が成り立つ．特に $m, n > 1$ ならば，(m, n) 型のトーラス結び目は全て自明でない．また，無限に多くの結び目が存在する．

証明　これから行おうとする群論的な議論は，1923 年，O. Schreier (シュライヤー)によって最初に行われた．G を

$$G = \langle \{a, b\}\, ; \{a^n = b^m\} \rangle$$

とし，G の元，$a^n = b^m$ を考える．この元は，

$$aa^n = a^{n+1} = a^n a, \quad ba^n = bb^m = b^{m+1} = b^m b = a^n b$$

であるから，a, b と可換であり，従って G の各元と可換である．よって a^n で生成される部分群 N は，G の正規部分群であるから，商群 G/N が定義できる．$g \in G$ とすると，適当に $\alpha(1), \beta(1), \cdots, \alpha(k), \beta(k)$ を選べば，g は，

$$g = a^{\alpha(1)} b^{\beta(1)} \cdots a^{\alpha(k)} b^{\beta(k)}$$

と書くことができる．従って $gN \in G/N$ は

$$\begin{aligned} gN &= (a^{\alpha(1)}N)(b^{\beta(1)}N) \cdots (a^{\alpha(k)}N)(b^{\beta(k)}N) \\ &= (aN)^{\alpha(1)}(bN)^{\beta(1)} \cdots (aN)^{\alpha(k)}(bN)^{\beta(k)} \end{aligned}$$

と書け，G/N が aN と bN により生成されていることが解る．$gN = N$ ならば，$g \in N$ であり，ある l に対して，$g = (a^n)^l = (b^m)^l$ である．よって，G/N の関係は $(aN)^n = N$ と $(bN)^m = N$ であり，

$$\begin{aligned} G/N &= \langle \{aN, bN\}\, ; \{(aN)^n = 1,\ (bN)^m = 1\} \rangle \\ &\cong \langle \{c, d\}\, ; \{c^n = 1,\ d^m = 1\} \rangle \end{aligned}$$

となる．G/N は自明な中心を持つことに注意する．何故ならば，x が G/N の中心に属するとすると，$cx=xc$ かつ $dx=xd$ である．最初の等式から，或る α に対して $x=c^{\alpha}$ であり，二番目の等式から，或る β に対して，$x=d^{\beta}$ である．よって $x=1$ となる．これは，G の中心 $Z(G)$ が N であることを意味している（もし，$p: G\to G/N$ を自然な射影とすると，$p(Z(G))\subseteq Z(G/N)$ となることが直ぐ解る）．言い換えれば，

$$G/Z(G)\cong\langle\{c,d\};\{c^n=1,\ d^m=1\}\rangle$$

である．この群を可換化すると，

$$\langle\{c,d\};\{c^n=1,\ d^m=1,\ cd=dc\}\rangle\cong \boldsymbol{Z}_n\times\boldsymbol{Z}_m$$

となる．

しかるに，(m,n) 型と (m',n') 型のトーラス結び目が同型であるとすると，それらの群，G,G' は同型である．従って，$G/Z(G)$ と $G'/Z(G')$ も同型である．それらを可換化すれば，$\boldsymbol{Z}_n\times\boldsymbol{Z}_m$ と $\boldsymbol{Z}_{n'}\times\boldsymbol{Z}_{m'}$ が同型でなければならないが，これは，m と n，m' と n' は互いに素だから，$\{m,n\}=\{m',n'\}$ のときだけ成り立つ．［訳者注］ n,m が共に素数ならばこの証明は正しいが，一般には，正しくない．反例：$\{4,9\}$，$\{3,12\}$ の場合．

27.7　練 習 問 題

(a)　$(m,1)$ 型，$(1,n)$ 型のトーラス結び目は自明であることを示せ．

(b)　(m,n) 型のトーラス結び目は，(n,m) 型のトーラス結び目に同型であることを示せ．また，それらは同値か．

(c)　トーラス結び目は，互いに素な正の整数の組 (m,n) に対して定義したが，任意の（零でない）互いに素な整数に対して定義できる．m と（または）n の符号を変えてできるトーラス結び目は，もとのトーラス結び目に同型であることを示せ．また，それは，もとの結び目に同値か．

(d)　トーラス結び目の群を可換化すると，$\boldsymbol{Z}$ になることを証明せよ（ヒント：$G=\langle\{a,b\};\{a^n=b^m\}\rangle$ とし，$\varphi: AG\to\boldsymbol{Z}$ を $\varphi(a^kb^l)=mk+nl$ で定義せよ）．

(e)　群 $\langle\{a,b\};\{a^3=b^2\}\rangle$ は群 $\langle\{x,y\};\{xyx=yxy\}\rangle$ に同型であることを証明せよ（ティーチェ変換，練習問題 23.1(f) を使え）．

28

結び目：II　順な結び目

K を $\boldsymbol{R}^3$ の結び目とする．p を，$p(x_1, x_2, x_3)=(x_1, x_2, 0)$ で与えられる $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^2$ の上への射影とする．$x \in p(K)$ が**交叉点** (crossing point) とは，$p^{-1}(x) \cap K$ が 2 点以上から成ることを言う．$p^{-1}(x) \cap K$ が 2 点から成るとき x を**二重点** (doubly crossing point) と言う．図 28.1 を参照せよ．二重点が，結び目をほんの少し動かして，その二重点を消滅させることができるとき，**真でない** (improper) と言う (図 28.1 の真でない二重点の図で，“上の部分” を左側へ動かせば，二重点を消滅させることができる)．

28.1 定　義

結び目 K が，**順** (tame) であるとは，K が，その全てが真の二重点であるような有限個の交叉点を持つ結び目と同型になることである．

前章で挙げた結び目の例は，全て順な結び目である．図 28.2 の結び目は，順でない結び目の例である．順でない結び目は，**野性的** (wild) と言われる．この章では，順な結び目について考える．

28.2 練習問題

(a) (m, n) 型のトーラス結び目は順であることを証明せよ．

(b) 有限個の交叉点を持つ結び目は順であることを証

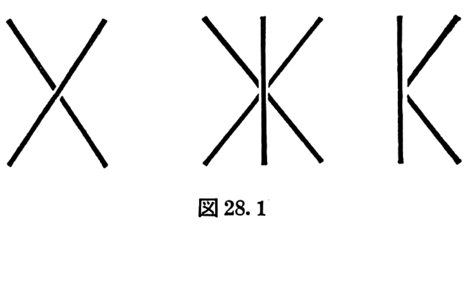


図 28.1

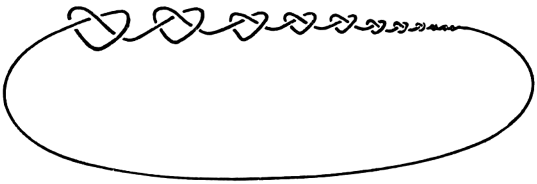


図 28. 2

明せよ.

(c) 結び目が順であるための必要十分条件は，その結び目が有限個の線分からできている結び目と同型であることを証明せよ.

(d) 結び目が順であるための必要十分条件は，$K\subset K_\varepsilon$ なる部分空間 $K_\varepsilon\subset \boldsymbol{R}^3$ が存在して，K_ε は $S^1\times D^2$ に同相で，その同相写像で K が $S^1\times\{0\}$ に写ることであることを証明せよ.

この章を通じて，K は順な結び目であるとする．目標は，K の群を計算することである．K は $\boldsymbol{R}^3$ の下半空間にある．即ち，

$$K\subset\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_3\leq 0\}$$

としてよい．更に，K は，各(真の二)重点で，例えば ε の距離だけ下がっていて，他の部分は平面 $\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_3=0\}$ にあるとしてよい．図 28. 3 を見よ．

P によって $(x_1,x_2,-\varepsilon)$ という点で，$p(x_1,x_2,-\varepsilon)$ が交叉点となる K の点の集合を表わす．$P=\varnothing$ とすると K は自明であるので $P\neq\varnothing$ と仮定してよい．p_1 を P の 1 つの点とする．K 上に矢印を書くと(向きを与えると) $p_2,p_3,\cdots,p_n$ という P の点が決まる．ここで n は K の二重点の数である．集合 P は K を有限個の弧 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ に分ける．K 上の矢印を，各 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ の上に 1 つ書くことにし，a_i の終点を $p_i, i=1,2,\cdots,n$ とする．図 28. 4 を参照せよ．

次に $\boldsymbol{R}^3-K$ の閉道を考える．$i=1,2,\cdots,n$ に対して，c_i によって，図 28. 5 に描いてあるように，弧 a_i を 1 周する小さな円周を表わす．c_i に，a_i 上の矢印とそれが右ネジの方向を与えるように，矢印を書く．勿論，$c_1,c_2,\cdots,c_n$ は互いに交わらないように取らなければならない．

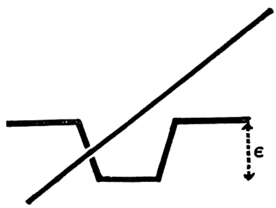


図 28. 3

x_0 を $\boldsymbol{R}^3-K$ の基点とする．但し，x_0 は K の

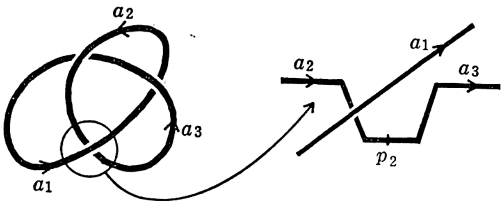


図 28.4

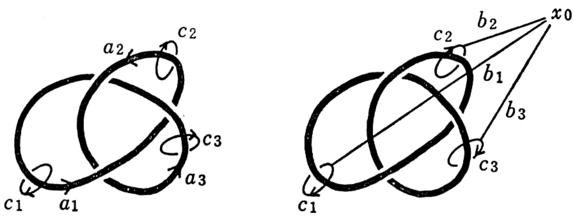


図 28.5

上方にあるとする．各 $i=1,2,\cdots,n$ に対して，b_i を x_0 から c_i に至る $\boldsymbol{R}^3-K$ の線分とする．但し，b_i は互いに交わらないように取り，各 b_i は上半平面 $\{(x_1, x_2, x_3)\,;\,x_3\geq 0\}$ にあるとする．図 28.5 を参照せよ．γ_i を，基点を x_0 とし，x_0 を出て，b_i に沿って進み，c_i の矢印の方向に，c_i を1周し，また b_i に沿って x_0 に戻る閉道とする．

$\pi(\boldsymbol{R}^3-K, x_0)$ が $[\gamma_1], [\gamma_2], \cdots [\gamma_n]$ により生成されることを示そう．関係については図 28.6 を見よ．交叉が図 28.6(*a*)のようなときは，

$$[\gamma_i][\gamma_j][\bar{\gamma}_{i+1}][\bar{\gamma}_j]=1$$

という関係になる．他の可能性は，図 28.6(*a*)の a_j の矢印の向きが反対の場合，即ち，図 28.6(*c*)のような場合である．この場合は，

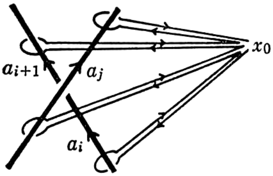
$$[\gamma_i][\bar{\gamma}_j][\bar{\gamma}_{i+1}][\gamma_j]=1$$

という関係になる．関係は，これから示すように，これらしか無い．上の場合も，これからも，$a_{n+1}=a_1, \gamma_{n+1}=\gamma_1$ 等とする．

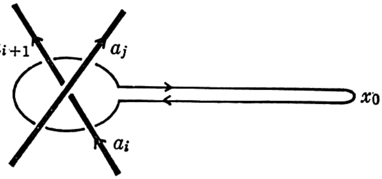
28.3 定　理

順な結び目 K の群は

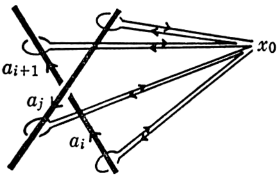
$$[\gamma_1], [\gamma_2], \cdots, [\gamma_n]$$



(a)　$[\gamma_i][\gamma_j][\bar{\gamma}_{i+1}][\bar{\gamma}_j]$



(b)　$[\epsilon]$



(c)　$[\gamma_i][\bar{\gamma}_j][\bar{\gamma}_{i+1}][\gamma_j]$.

図 28.6

により生成され，関係

$$[\gamma_1]=r_1,\quad [\gamma_2]=r_2,\cdots,\quad [\gamma_n]=r_n$$

を持つ．各関係 $[\gamma_i]=r_i$ は，或る j に対して，

$$[\gamma_i]=[\gamma_i][\gamma_{i+1}][\gamma_j]^{-1}$$

または，

$$[\gamma_i]=[\gamma_j]^{-1}[\gamma_{i+1}][\gamma_j]$$

という形をしている．更に，関係 $[\gamma_k]=r_k$ の中の 1 つは省略できる．

関係の中に現われる j は，点 p_i を上交叉する弧 a_j によって決定される．2 つの関係のどちらが成り立つかは，a_i 上と a_j 上の矢印に依存する．特に，矢印が局所的に右ネジ系ならば，最初の関係が成り立ち，左ネジ系ならば，2 番目の関係が成り立つ．各々図 28.6(a) と (c) を参照せよ．

定理 28.3 の関係式の形をよく見ると，次のことが解る．

28.4　系

結び目の群を可換化すると $\boldsymbol{Z}$ になる．

定理 28.3 を証明するために，C と A を $\boldsymbol{R}^3$ の部分空間

$$C=\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_3>-\varepsilon/3\}$$

$$A=\{(x_1,x_2,x_3)\ ;\ x_3<-\varepsilon/3\}$$

として定義する．集合 $C\cap K$（そして $A\cap K$）は，交叉点を持たない n 個の互いに交わらない弧から成っている．従って，$S_i; i=1, 2, \cdots, n$ を，円周 $\{(x_1, x_2, x_3\ ;\ x_1=i, x_2{}^2+x_3{}^2=1\}$ とすると，同相写像 $h: C\to C$ で $h(C\cap K)$ が和集合

$$\bigcup_{i=1}^{n}(S_i\cap C)$$

となるものが存在する．図 28.7 を参照せよ．

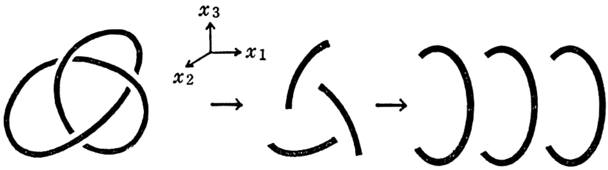


図 28.7

よって，$C-K$ は円板から，n 個の点を取り除いたものとホモトピー同値であるから，$\pi(C-K, x_0)$ は，n 個の生成元 $[\gamma_1], [\gamma_2], \cdots, [\gamma_n]$ で生成される自由群である．

同様にして，$A-K$ の基本群が，n 個の生成元で生成される自由群であることが解る．しかしながら，$A-K$ は x_0 を含んでいない．そこで，b を，K や他の前に選んだ曲線と交わらない，x_0 から A に至る線分とする．B を，A と b からの距離が，例えば δ より近い全ての点とを合わせたものとする．$B-K$ は開かつ道連結であり，$\pi(B-K, x_0)$ は n 個の生成元 $[\beta_1], [\beta_2], \cdots [\beta_n]$ で生成される自由群であることは明らかである．閉道 β_i は，x_0 から b に沿って A に至り，P_i の十分近くまで進み，$B-K$ の p_i を中心とする円周に沿って1周し，また x_0 に戻るものである．

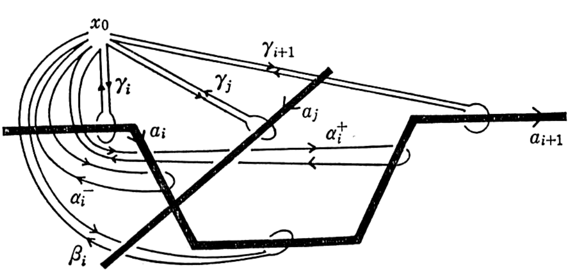


図 28.8

次に空間$(B-K)\cap(C-K)$を考察する．この空間は，明らかに，円板から$2n$個の点を取り除いたものと同じホモトピー型を持つから，$\pi((B-K)\cap(c-K),x_0)$は，$2n$個の生成元，$[\alpha_1^-],[\alpha_2^-],\cdots,[\alpha_n^-],[\alpha_1^+],[\alpha_2^+],\cdots,[\alpha_n^+]$によって生成される自由群である．これらの生成元を記述するために，$B\cap C$はKを$2n$個の弧に分けることに注意する．それらを$a_1^-,a_2^-,\cdots,a_n^-,a_1^+,a_2^+,\cdots,a_n^+$で表わすが，$a_i^-,a_i^+$は各々，$a_i,a_{i+1}$の$A\cap B$に含まれる，点$p_i$に近い方の部分である．道$\alpha_i^-$は，$a_i^-$を一周するが，$\alpha_i^+$は(便宜上)$a_i^-$と$a_i^+$を一周するものとする．図 28.8 を参照せよ．

$\varphi_B:(B\cap C)-K\to B-K$と$\varphi_C:(B\cap C)-K\to C-K$を自然な包含写像とする．次の同値は簡単に解る．

$$\varphi_B\alpha_i^-\sim\beta_i,\ \ \varphi_B\alpha_i^+\sim\varepsilon,\ \ \varphi_c\alpha_i^-\sim\gamma_i,$$

また，a_jとa_i,a_{i+1}の矢印の関係に従って，

$$\varphi_C\alpha_i^+\sim((\gamma_i*\gamma_j)*\gamma_{i+1}^-)*\bar{\gamma}_j$$

となる(図 28.8 には，上の最初の関係を示してある)．

空間$B-K$, $C-K$, $(B-K)\cap(C-K)$は全て開かつ道連結であるから，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理を適用できる．$\pi(\boldsymbol{R}^3-K,x_0)$の生成元と関係に関する結果は，それから直ぐ解る．

関係の内の任意の 1 つは余分であるということを示すには，AをA'と変えれば良い．但し，A'は$\boldsymbol{R}^3$の原点からの距離が，ある大きな数Nより大きな点全体とAとを合わせたものである．$B'=B\cup A'$とする．$(B'-K)$の基本群は，$B-K$の基本群と同じである．しかし，$(B'\cap C)-K$の基本群は，$(B\cap C)-K$の基本群より 1 つ少ない生成元を持つ．何故なら，$(B'\cap C)-K$は球面S^2から，$2n$個の点を除いたものと同じホモトピー型を持つからである．よって，$\pi((B'\cap C)-K,x_0)$から，生成元$[\alpha_k^+]$を取り去れば，もはや関係$[\gamma_k]=\gamma_k$は$\pi(\boldsymbol{R}^3-K,x_0)$にとって必要でないことが解る．詳しいことは読者に委ねる．

上の定理を 3 つの例で説明しよう．簡単のために，$[\gamma_k]$を単にγ_kで表わす．まず最初に，三葉結び目の群を計算し直してみよう．図 28.9 の記号と前の記号とを使うと，三葉結び目の群は，3 個の生成元$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$と関係$\gamma_1=\gamma_3^{-1}\gamma_2\gamma_3$, $\gamma_2=\gamma_1^{-1}\gamma_3\gamma_1$, $\gamma_3=\gamma_2^{-1}\gamma_1\gamma_2$により表示される群である．この内 1 つの関係は余分である．例えば，最初の関係を 2 番目の関係に代入すると 3 番目の関係を得る．

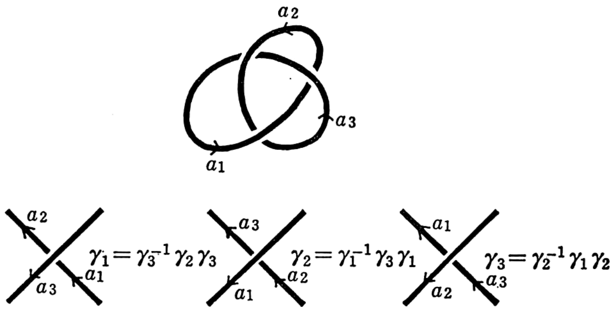


図 28. 9

即ち，

$$\gamma_2 = \gamma_1{}^{-1}\gamma_3\gamma_1 = \gamma_1{}^{-1}\gamma_3(\gamma_3{}^{-1}\gamma_2\gamma_3) = \gamma_1{}^{-1}\gamma_2\gamma_3$$

から，$\gamma_3=\gamma_2{}^{-1}\gamma_1\gamma_2$ が得られる．従って，三葉結び目の群は，

$$\langle\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3\}\ ;\ \{\gamma_1=\gamma_3{}^{-1}\gamma_2\gamma_3,\ \gamma_3=\gamma_1{}^{-1}\gamma_3\gamma_1\}\rangle$$
$$=\langle\{\gamma_2,\gamma_3\}\ ;\ \{\gamma_2=\gamma_3{}^{-1}\gamma_2{}^{-1}\gamma_3\gamma_3\gamma_3{}^{-1}\gamma_2\gamma_3\}\rangle$$
$$=\langle\{\gamma_2,\gamma_3\}\ ;\ \{\gamma_1\gamma_3\gamma_2=\gamma_3\gamma_2\gamma_3\}\rangle$$

となり，この群は，群

$$\langle\{a,b\}\ ;\ \{a^3=b^2\}\rangle$$

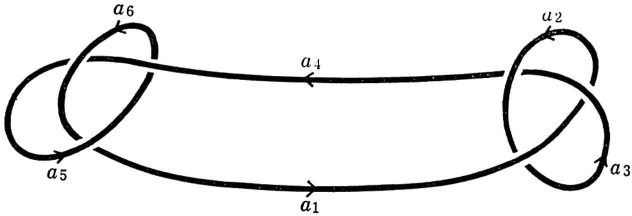
に同型となることが(かなり簡単に)解る．

次の例としては，図 28. 10 (a) のたて結び目を考えよう．この結び目の群は，生成元 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_6$ とその内の 1 つは余分であるが，関係

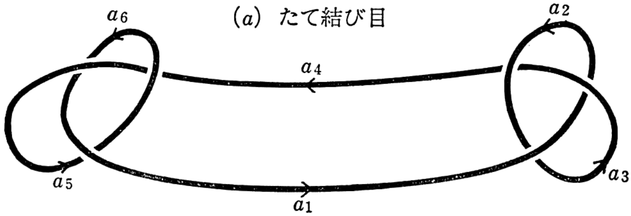
$$\gamma_1 = \gamma_3{}^{-1}\gamma_2\gamma_3, \qquad \gamma_2 = \gamma_1{}^{-1}\gamma_3\gamma_1$$
$$\gamma_3 = \gamma_2{}^{-1}\gamma_4\gamma_2, \qquad \gamma_4 = \gamma_6{}^{-1}\gamma_5,\gamma_6,$$
$$\gamma_5 = \gamma_4{}^{-1}\gamma_6\gamma_4, \qquad \gamma_6 = \gamma_5{}^{-1}\gamma_1,\gamma_5$$

とで表示される群であることが解る．全ての関係は，$\gamma_1,\gamma_3,\gamma_5$ によって書き直すことができ，上の群が，3 個の生成元 $\gamma_1,\gamma_3,\gamma_5$ と 2 個の関係 $\gamma_1\gamma_3\gamma_1=\gamma_3\gamma_1\gamma_3$ と $\gamma_5\gamma_1\gamma_5=\gamma_1\gamma_5\gamma_1$ とにより表示される群と同型であることを示すことができる．よって，たて結び目の群は，3 個の生成元，x,y,z と，2 個の関係，$xyx=yxy$, $xzx=zxz$ とにより表示される群である．

最後の例として，図 28. 10 (b) のこま結び目を考えよう．この結び目の群は，6 個の生成元，$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_6$ とその内の 1 つは余分であるが関係



(*a*)　たて結び目



(*b*)　こま結び目

図 28.10

$$\gamma_1 = \gamma_3{}^{-1}\gamma_2\gamma_3, \qquad \gamma_2 = \gamma_1{}^{-1}\gamma_3\gamma_1$$
$$\gamma_3 = \gamma_2{}^{-1}\gamma_4\gamma_2, \qquad \gamma_4 = \gamma_6\gamma_5\gamma_6{}^{-1}$$
$$\gamma_5 = \gamma_1\gamma_6\gamma_1{}^{-1}. \qquad \gamma_6 = \gamma_5\gamma_1\gamma_5{}^{-1}$$

とで表示される群である．たて結び目の場合と同じように，生成元の内，3 個を消去でき，この群が，3 個の生成元 $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$ と 2 個の関係，$\gamma_1\gamma_3\gamma_1 = \gamma_3\gamma_1\gamma_3$, $\gamma_5\gamma_1\gamma_5 = \gamma_1\gamma_5\gamma_1$ とにより表示される群であることが簡単に解る．従ってこま結び目の群は，3 個の生成元 x, y, z と 2 個の関係 $xyx = yxy$, $xzx = zxz$ とにより表示される群である．特に，たて結び目の群とこま結び目の群は同型であることが解る．しかし実際には，証明しないが，これら 2 つの結び目は同型でない．

28.5　練 習 問 題

定理 28.3 を使って図 27.1 の結び目の群を計算せよ．図 27.1(*b*)の結び目に対して，その答えはそうなるべきように，$\boldsymbol{Z}$ であることを示せ．

結び目に関係する 2 つの構成を簡単に述べてこの章を終えることにしよう．これら構成の細かい点や，興味深い性質は，練習問題という形で読者に委ねる．

与えられた 2 つの結び目 K_1, K_2 の各々に矢印を付ける．K_1 と K_2 の連結和 $K_1 \# K_2$ を，各結び目から区間を取り除き，矢印が同じ向きになるように張り

合わせて得られる結び目とする．図 28.11 を参照せよ．**素な**(prime)結び目とは，自明でない 2 つの結び目 K_1, K_2 によってそれが，$K_1\# K_2$ とは表わせないものを言う．

28.6 練習問題

(a) $K_1\#(K_2\# K_3)$ は $(K_1\# K_2)\# K_3$ と同値であることを示せ．

(b) $K_1\# K_2$ は $K_2\# K_1$ と同値であることを示せ(ヒント：図 28.12 を見よ)．

(c) K_1 が K_1' に同値で，K_2 が K_2' に同値であれば，$K_1\# K_2$ は $K_1'\# K_2'$ に同値であることを示せ．同値という言葉を同型で置き換えても，このことは成り立つか？

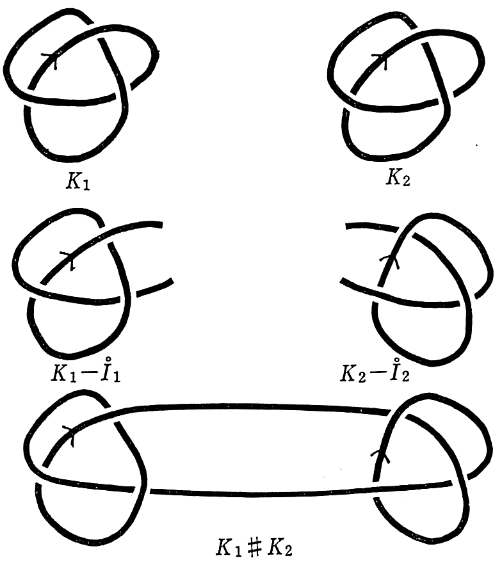


図 28.11

次の構成は，各(順な)結び目に，境界の有る曲面を関連させる(練習問題 11.8 を見よ)．これを行うために，まず，結び目に矢印を書く．図 28.13(a)のような矢印の向きを持つ，各二重点の近くの部分を，図 28.13(b)に示すようなものに置き換える．

こうすると残るのは，いくつかの互いに交わらない円周である．各円周を円板で埋め，できた全ての円板が互いに交わらないようにできる．これをするためには，円周が重なっているときは，円板を少し，その平面から押し出せばよい．即ち，1 番内側から円板を張り始め，順に外側のものに張っていくのである．最後に，もとの二重点のところに，半分捻った帯を付ける(図 28.13(d))．でき上がったものは，向き付け可能な境界のある曲面である．その境界が結び目 K であることは勿論である．このとき，その境界のある曲面は，その結び目を**張る**と言う．

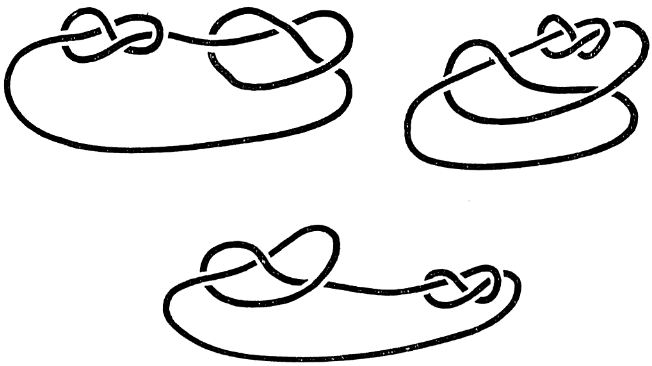


図 28. 12

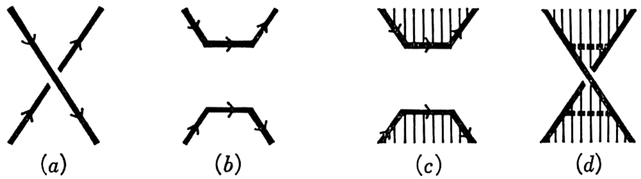


図 28. 13

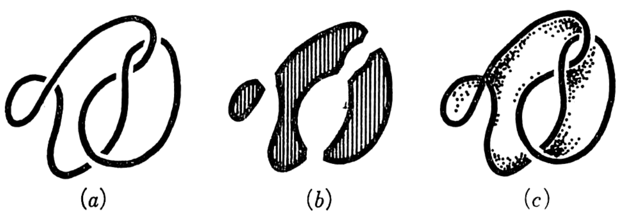
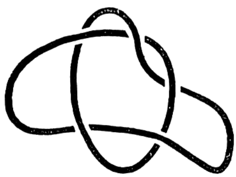


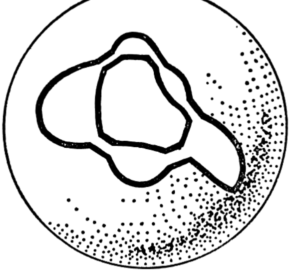
図 28. 14

いくつかの例が，図 28. 14 と 28. 15 にある．境界のある曲面の種数とは，(練習問題 11. 8 (b) の意味で) それに関連した曲面の種数のこととする．今構成した境界のある曲面の種数は，二重点の数を c，構成するときできた円周の数を d とすると，$(1/2)(c-d+1)$ となる．

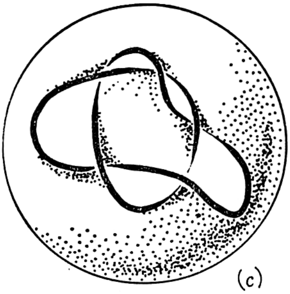
1 つの結び目にいくつもの異なった，境界のある曲面を張ることができる．K を張る，向き付け可能な，境界を持つ曲面の最小の種数 $g(K)$ を，結び目 K の**種数** (genus) と言う．



(a)



(b)



(c)

図 28. 15

28. 7 練 習 問 題

(a) $g(K\sharp L)=g(K)+g(L)$ であることを示せ(これは明らかなことではない).

(b) (a)からどんな結び目も，有限個の素な結び目の連結和で書けることを示せ.

(c) 自明な結び目の種数は0であることを証明せよ.

(d) K が自明でなければ，どんな結び目 L に対しても $K\sharp L$ が自明でないことを示せ.

(e) (m, n) 型トーラス結び目の種数は $\frac{1}{2}(m-1)(n-1)$ 以下であることを証明せよ.

(f) 平面に“描かれた”結び目 K が与えられたとき，次の操作を行う．まず初めに，その結び目を取り巻く最大の地域に影を付ける．図 28.16 を見よ．次に，隣り合う領域が両方とも白，或いは両方とも影にならないように，領域に影を付けていく．そして，結び目を取り巻く最大の領域を

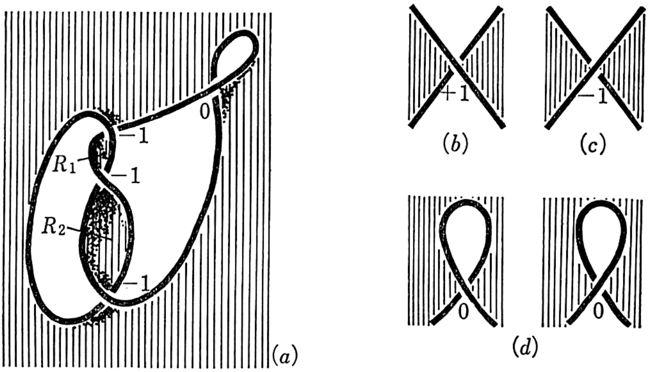


図 28.16

除いて，影を付けた領域に，$R_1, R_2, \cdots, R_n$ と名前を付ける．各交叉点に，その交叉点が，図 28.16(*b*), (*c*), (*d*)のどれに対応するかによって，それぞれ，$+1, -1, 0$ を記入する．0になるのは，交叉点の近くの，2つの影を付けた領域が，同じ領域に含まれているときである．

$n \times n$ 対称行列 $A(K)=(a_{ij})$ を次のような方法で作る：即ち，

a_{ii}＝領域 R_i の交叉点に記入した数の和

$-a_{ij}=-a_{ji}$＝領域 R_i と R_j に共通な交叉点に記入した数の和

例えば，図 28.16(*a*)の結び目は，行列

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

を決める．$d(K)=\det A(K)$ とすると，$d(K)$ は影を付けた部分の名前のつけ方には依存しない．$n=0$ ならば $d(K)=1$ と定義する．

(i)　同値な結び目 K, L で，$d(K) \neq d(L)$ となるものを見つけよ．$|d(K)| = |d(L)|$ は成り立つか？

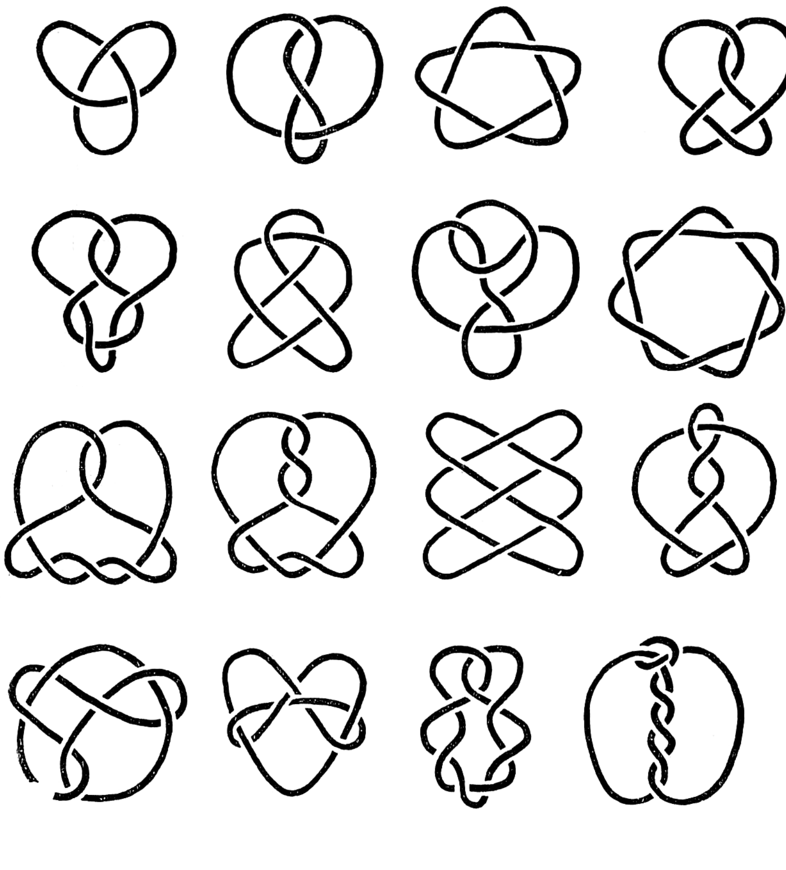
(ii)　K と L が同型な結び目ならば，$|d(K)|=|d(L)|$ が成り立つか？

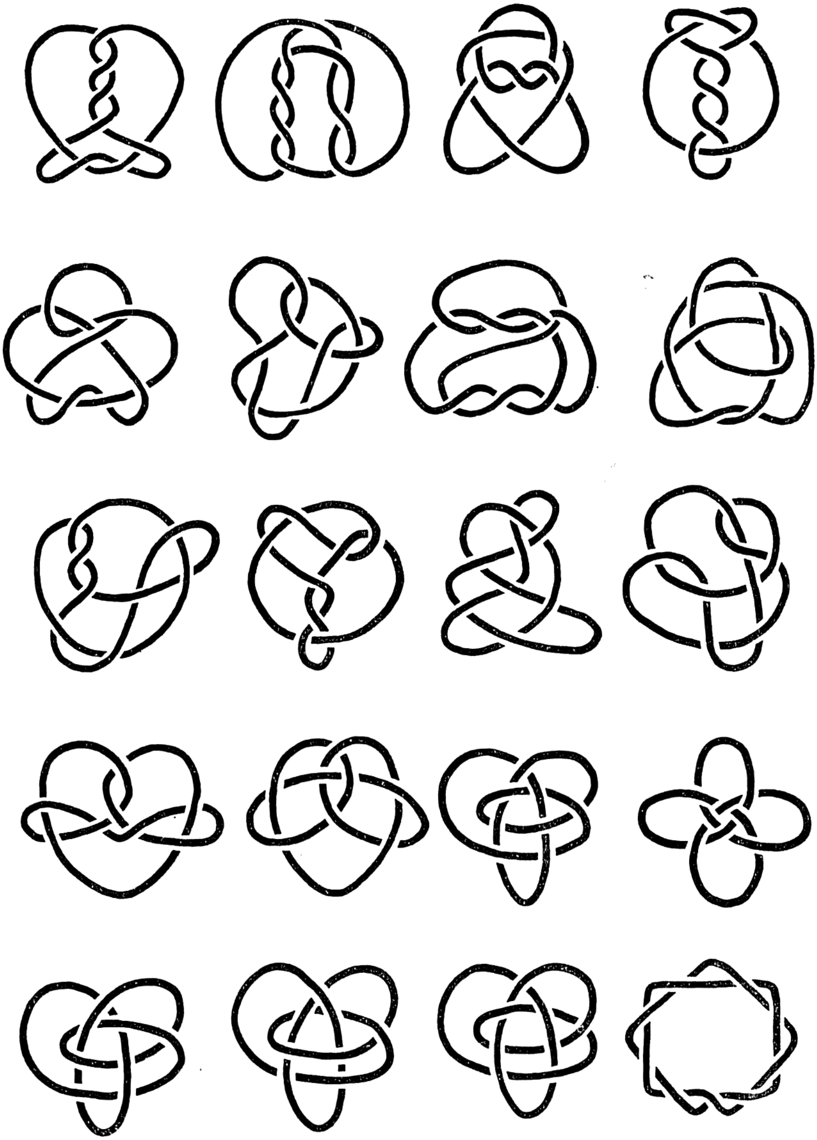
(iii)　同値でない結び目 K, L で，$|d(K)|=|d(L)|$ となるものを見つけよ．

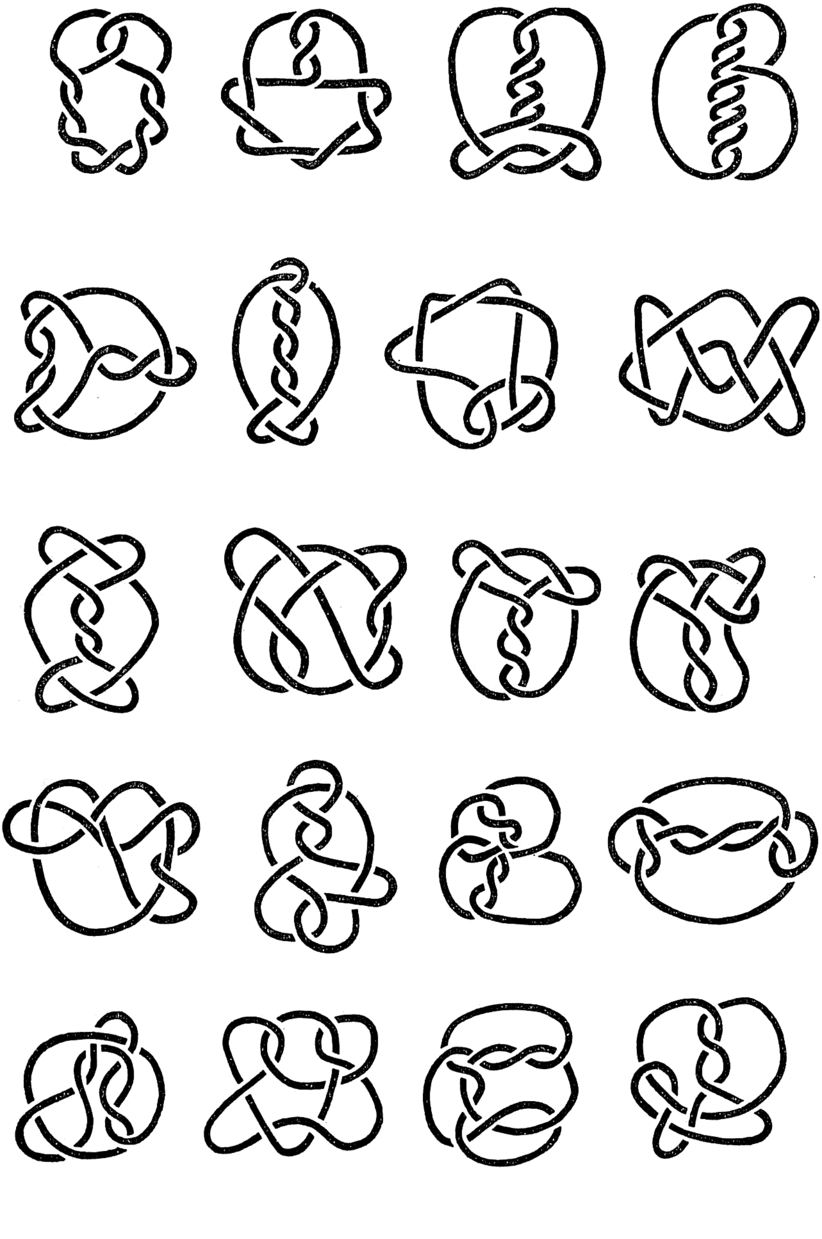
(iv)　$d(K \# L)=d(K)d(L)$ であることを示せ．

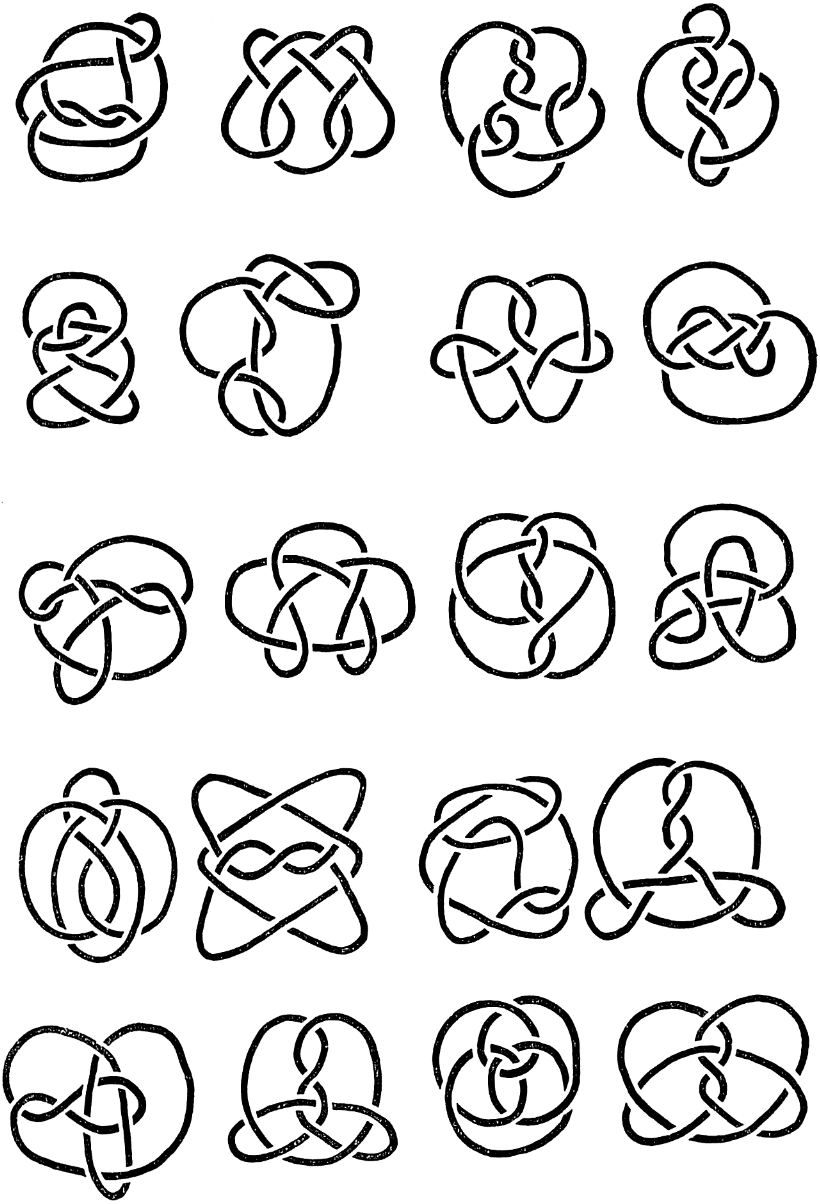
付録　結び目表

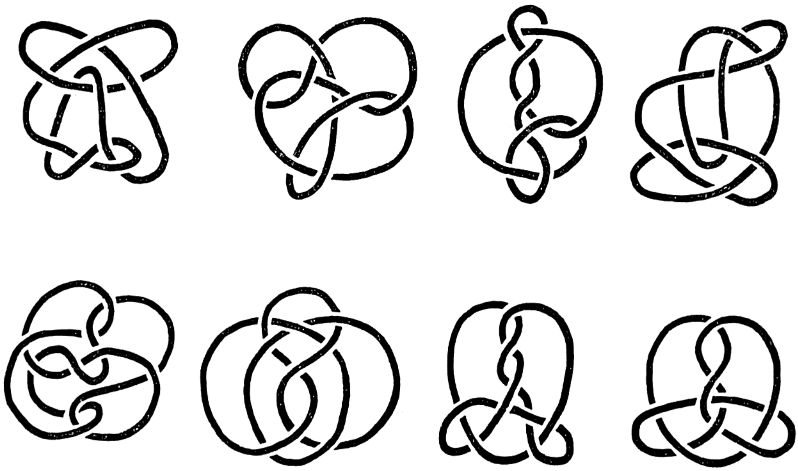
次の図には，二重点の数が9個以下の，素な結び目を，同型なものは除いて，全て示している．











29

特異ホモロジー：序論

ホモロジー論が，トポロジーに於て非常に重要であることは，疑いの余地が無いことである．この章では，その理論を十分正当に与えることはできない．ただ，基礎的な考え方を例証し，特別な場合に，それを基本群に関係付けることに止める．

29.1 定　義

標準 $\boldsymbol{n}$ 単体 (standard n-simplex) Δ_n とは次のように定義される $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分空間のことである．

$$\Delta_n = \left\{x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)\in \boldsymbol{R}^{n+1} \ ; \sum_{i=1}^{n} x_i=1, x_i\geq 0,\ i=0, 1, \cdots, n\right\}$$

点 $v_0=(1, 0, \cdots, 0)$, $v_1=(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $v_n=(0, 0, \cdots, 0, 1)$ を Δ_n の**頂点** (vertex) と言う．

従って，Δ_0 は 1 つの点であり，Δ_1 は線分，Δ_2 は三角形領域，Δ_3 は中身の詰まった四面体である．図 29.1 を参照せよ．

29.2 定　義

X を位相空間とする．X の**特異 n 単体** (singular n-simplex) とは，連続写像 $\varphi : \Delta_n \to X$ のことである．

従って，特異 0 単体とは，単に X の点であり，特異 1 単体は，本質的に X の道である．実際，φ を特異 1 単体とすると，$f(t)=\varphi(1-t, t)$ と定義すれば，$f : I\to X$ は始点 $\varphi(v_0)$，終点 $\varphi(v_1)$ の道である．逆に，道 $f : I\to X$ が与えられ

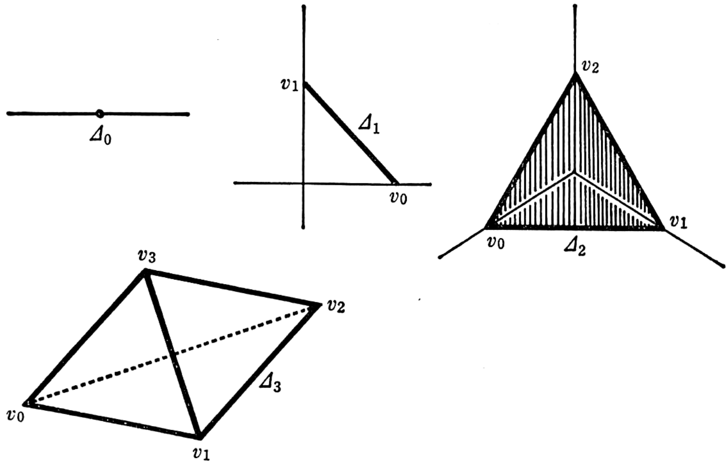


図 29. 1

たとすると，$\varphi(x_0, x_1)=f(x_1)$ と定義することにより，特異 1 単体 $\varphi : \Delta_1 \to X$ を得る.

29.3 定　　義

X の特異 **n 次元鎖** (n-chain) とは，

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$$

という形の式のことである．但し，$\{\varphi_j ; j \in J\}$ は X の (J をある添字集合とする) 全ての特異単体の集まりであり，$n_j \in \boldsymbol{Z}$ は $\{n_j : j \in J\}$ の中で高々有限個が 0 でないとする.

X の特異 n 次元鎖の集合 $S_n(X)$ は

$$\sum n_j \varphi_j + \sum m \varphi_j = \sum (n_j + m_j) \varphi_j$$

で定義される加法に関して，アーベル群となる．零元は $\sum 0 \varphi_j$ であり，$\sum n_j \varphi_j$ の逆元は $\sum (-n_j) \varphi_j$ である．結合法則をみたすことも明らかであり，この群が，アーベル群であることも明らかである.

群 $S_n(X)$ は色々良い性質を持っているが，残念なことは，一般にはそれが，極端に大きいということである．この群をより扱い易くするために (基本群を定義するために同値関係を使ったのと同じように)，1 つの同値関係を与える.

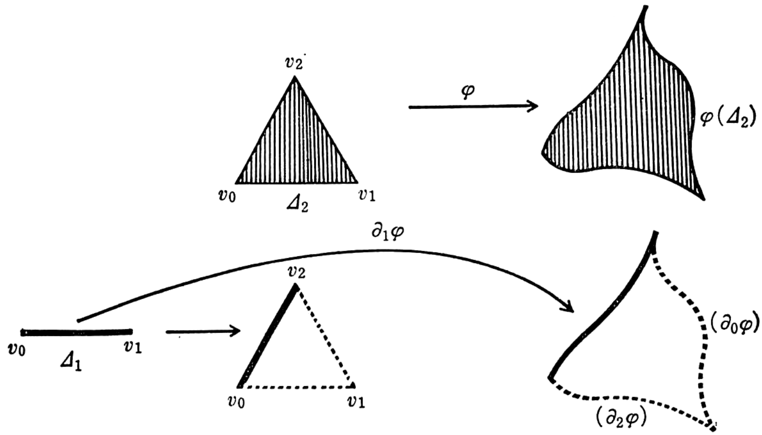


図 29.2

まず初めに，境界準同型の概念を定義する．

特異 n 単体 φ が与えられたとき，$i=0,1,\cdots n$ に対して，特異 $(n-1)$ 単体 $\partial_i\varphi$ を

$$\partial_i\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = \varphi(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$$

により定義する．図 29.2 を参照せよ．明らかにこれは群の準同型

$$\partial_i : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$$
$$\sum n_j\varphi_j \to \sum n_j\partial_i\varphi_j$$

を導く．

29.4 定　　義

境界準同型 (boundary operator) $\partial : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ は

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \cdots + (-1)^n\partial_n = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i$$

により定義される．

境界準同型を使って，$S_n(X)$ の重要な 2 つの部分群を定義することができる．

29.5 定　　義

(a) 特異 n 次元鎖 $c \in S_n(X)$ が $\partial c=0$ となるとき，**n 次元輪体**と言う．X の n 次元輪体の集合を $Z_n(X)$ で表わす．

(b) 特異 n 次元鎖 $d\in S_n(X)$ が，或る $e\in S_{n+1}(X)$ に対して，$d=\partial e$ となるとき，**n 次元境界輪体**と言う．X の n 次元境界輪体の集合を $B_n(X)$ で表わす．

言い換えると，

$$Z_n(X)=\text{kernel}\,\partial : S_n(X)\to S_{n-1}(X)$$
$$B_n(X)=\text{image}\,\partial : S_{n+1}(X)\to S_n(X)$$

であり，$Z_n(X)$ と $B_n(X)$ は両方とも，明らかに $S_n(X)$ の部分群である．

特異 0 次元鎖は全て，0 次元輪体である．即ち，$Z_0(X)=S_0(X)$ であることに注意する．

全ての n 次元境界輪体は，n 次元輪体であることが解る．これは次の結果から直ぐ出る．

29.6 定　　理

$$\partial\partial=0$$

証明　特異 n 単体 φ 上で $\partial\partial$ を計算する．

$$\partial\partial\varphi=\partial\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i\varphi=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi$$

もし $i\leq j$ ならば，$\partial_j\partial_i=\partial_i\partial_{j+1}$ であることを示す：これは次のようにして解る．

$$\begin{aligned}(\partial\partial_i\varphi)(x_0,\cdots,x_{n-2})&=(\partial_j(\partial_i\varphi))(x_0,\cdots,x_{n-2})\\&=(\partial_i\varphi)(x_0,\cdots x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_{n-2})\\&=\varphi(x_0\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_{n-2})\\&=(\partial_j\varphi)(x_0,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_{n-2})\\&=(\partial_i\partial_{j+1}\varphi)(x_0,\cdots,x_{n-2})\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\partial\partial\varphi&=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi\\&=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{j}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_{j+1}\varphi+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi\\&=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i}^{n-1}(-1)^{i+j}\partial_i\partial_{j+1}\varphi+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi\\&=\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=j}^{n-1}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_{i+1}\varphi+\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\partial_i\varphi\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j-1} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi$$
$$= 0$$

従って，$B_n(X)$ は $Z_n(X)$ の部分群である．両方共，アーベル群であるから，$B_n(X)$ は $Z_n(X)$ の正規部分群であり，商群 $Z_n(X)/B_n(X)$ が定義される．

29.7 定　義

X の $\boldsymbol{n}$ **次元ホモロジー群**(*n*th homology group)は $Z_n(X)/B_n(X)$ のことである，と定義され，$H_n(X)$ と表わされる．

言い換えると，$H_n(X)$ の元は，$c, c' \in Z_n(X)$ に対して

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_n(X)$$

で与えられる同値関係による，輪体の同値類である($\sim$が同値関係であることは簡単に確かめられる)．このとき，c と c' は**ホモローグ(homologue)な輪体**であると言う．

次の 2 つの結果は，1 点のホモロジー群と，道連結空間の 0 次元ホモロジー群を決定する．

29.8 補　題

X が 1 点から成る空間ならば，$H_0(X) \cong \boldsymbol{Z}$ で，$n>0$ に対しては，$H_n(X) = 0$ である．

証明　全ての $n \geq 0$ に対して，特異 n 単体 $\varphi_n : \Delta_n \to X$ が一意的に存在するから，

$$S_n(X) = \boldsymbol{Z} = \{k\varphi_{(n)} \,;\, k \in \boldsymbol{Z}\}$$

である．また $n>0$ に対して，$\partial_i \varphi_{(n)} = \varphi_{(n-1)}$ であり

$$\partial \varphi_{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \partial_i \varphi_{(n)} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi_{(n-1)}$$
$$= \begin{cases} 0 & n \text{ が奇数のとき} \\ \varphi_{(n-1)} & n \text{ が偶数かつ 0 より大きいとき} \end{cases}$$

となる．$n=0$ に対しては，$\partial \varphi_{(0)} = 0$ である．

上のことから，

$$Z_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & n \text{ が奇数，または 0 のとき} \\ 0 & n \text{ が 0 より大きい偶数のとき} \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & n\text{ が奇数のとき} \\ 0 & n\text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

となることが解り，よって

$$H_n(X) = \begin{cases} \boldsymbol{Z} & n=0 \\ 0 & n>0 \end{cases}$$

となる.

29.9 補　　題

X が空でない道連結空間ならば，$H_0(X)\cong\boldsymbol{Z}$ である.

証明　典型的な，0 次元輪体(＝特異 0 次元鎖)は

$$\sum_{x\in X} n_x x$$

という形をしている．ここで，$n_x\in\boldsymbol{Z}$ で $\{n_x\,;\,x\in X\}$ の内，高々有限個が 0 でない．$\phi: H_0(X)\to\boldsymbol{Z}$ を

$$\phi(\sum n_x x) = \sum n_x$$

で定義する.

まず，これが矛盾なく定義できることを確かめる．$\sum m_x x$ を $\sum n_x x$ にホモローグな，0 次元輪体とする．即ち，c を或る特異 1 次元鎖として，

$$\sum n_x x = \sum m_x x + \partial c$$

となっているとする．特異 1 次元鎖は，$k_j\in\boldsymbol{Z}, \varphi_j$ を特異 1 次元単体として，

$$c = \sum_{j\in J} k_j\varphi_j$$

という形をしている.

$$\partial c = \sum_{j\in J} k_j\partial\varphi_j = \sum_{j\in J} k_j(\varphi_j(v_1)-\varphi_j(v_0))$$

となるから，

$$\begin{aligned}\phi(\sum n_x x) &= \phi(\sum m_x x + \partial c)\\ &= \phi(\sum m_x x + \sum k_j\varphi_j(v_1) - \sum k_j\varphi_j(v_0))\\ &= \sum m_x + \sum k_j - \sum k_j\\ &= \sum m_x\\ &= \phi(\sum m_x x)\end{aligned}$$

であるから，ϕ が矛盾無く定義できることが示された.

明らかに ϕ は準同型である．X の任意の点 x に対して，$\phi(nx)=n$ だから，

ψは全射である．最後にψが単射であることを示す．$\sum m_x x$を0次元輪体とすると，

$$\sum n_x x = (\sum n_x)x_0 + \sum_{x\in X}(n_x x - n_x x_0)$$
$$= (\sum n_x)x_0 + \partial(\sum_{x\in X} n_x \varphi_x)$$

となる．但し，φ_xは始点x，終点x_0の道(＝特異1単体)である．従って，$\sum n_x x$と$(\sum n_x)x_0$はホモローグである．よって，$\psi(\sum n_x x)=0$ならば，$\sum n_x=0$であり，$\sum n_x$は0にホモローグである．よって，ψは単射である．

この最後の段階は，任意の0次元輪体$c=\sum n_x x$は，整数$\sum n_x$だけで完全に決まる．0次元輪体$(\sum n_x)x_0$にホモローグとなるので，最も重要な点である．∎

連続写像$f: X\to Y$に対して

$$f_\sharp : S_n(X) \to S_n(Y)$$

を

$$f_\sharp(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j) = \sum_{j\in J} n_j f\varphi_j$$

で定義する．

($f_\sharp : S_n(X)\to S_n(Y)$は，$f_{n\sharp} : S_n(X)\to S_n(Y)$と表わすべきかもしれないが，却って煩しい．)$f_\sharp$が群の準同型であることは明らかである．実際，$f_\sharp$は，輪体を輪体に，境界輪体を境界輪体に写す．これは次の結果から解る．

29.10　補　　題

$$\partial f_\sharp = f_\sharp \partial$$

証明　特異$(n-1)$単体φを考える．

$$\begin{aligned}(\partial_i f_\sharp)(\varphi)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) &= \partial_i(f\varphi)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\\ &= (f\varphi)(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})\\ &= f(\varphi(x_0, x_1, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1}))\\ &= f((\partial_i\varphi)(x_0 x_i, \cdots, x_{n-1}))\\ &= (f\partial_i\varphi)(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\\ &= ((f_\sharp\partial_i)(\varphi))(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1})\end{aligned}$$

となり，補題が証明される．

29.11　系

$$f_\sharp(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y), \qquad f_\sharp(B_n(X)) \subseteq B_n(Y)$$

証明　もし c が X の輪体ならば，$\partial f_\sharp(c)=f_\sharp\partial(c)=0$ となり，$f_\sharp(c)$ が Y の輪体であることが示される．もし d が X の境界輪体ならば，$d=\partial(e)$ となり，$f_\sharp(d)=f_\sharp\partial e=\partial f_\sharp e$ は Y の境界輪体である．∎

上の系から，$\sum_{j\in J} n_j\varphi_j$ が X の n 次元輪体のとき，

$$f_*(\sum_{j\in J} n_j\varphi_j) = \sum_{j\in J} n_j f\varphi_j$$

により定義される群の準同型

$$f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$$

が存在することが示される．$f_* : H_n(X)\to H_n(Y)$ を**誘導準同型**という．

次の2つの結果は簡単に証明できるので，読者に委ねることにする．定理15.9と系15.10を比較せよ．

29.12　定　　理

(i)　$f : X\to Y$，$g : Y\to Z$ を連続写像とすると：全ての $n\geq 0$ に対して $(gf)_*=g_*f_* : H_n(X)\to H_n(Z)$ である．

(ii)　$1 : X\to Y$ を恒等写像とすると，全ての $n\geq 0$ に対して，1_* は $H_n(X)$ 上の恒等準同型である．

29.13　系

$f : X\to Y$ が同相写像ならば，全ての $n\geq 0$ に対して，$f_* : H_n(X)\to H_n(Y)$ は同型である．

注意：ホモロジーは位相から代数(本質的にはアーベル群)への関手である(練習問題15.11の前の注意を参照せよ)．

実際には，2つの空間がホモトピー同値ならば，それらのホモロジー群は同型である．これは次のホモトピー不変性定理(homotopy invariance theorem)により示される．

29.14　定　　理

$f, g : X\to Y$，を連続写像とする．もし f と g がホモトープならば，全て

の $n\geq 0$ に対して，$f_*=g_*:H_n(X)\to H_n(Y)$ である．

証明　$t\in I$ に対して，$\lambda_t:X\to X\times I$ を $\lambda_t(x)=(x,t)$ で与えられるとする．$F:X\times I\to Y$ を f から g へのホモトピーとする．即ち，

$$F(x,0)=f(x),\qquad F(x,1)=g(x),$$

或いは，λ_t を使って

$$F\lambda_0=f,\qquad F\lambda_1=g$$

とする．

$\lambda_{0*}=\lambda_{1*}$ と仮定すると，

$$f_*=(F\lambda_0)_*=F_*\lambda_{0*}=F_*\lambda_{1*}=(F\lambda_1)_*=g_*$$

となる．従って，$\lambda_{0*}=\lambda_{1*}:H_n(X)\to H_n(X\times I)$ となることを示せばよい．示すことは，準同型

$$\lambda_{0\sharp}\ ;\ \lambda_{1\sharp}\ ;\ S_n(X)\to S_n(X\times I)$$

に対して，

$$\partial P+P\partial=\lambda_{1\sharp}-\lambda_{0\sharp}$$

となる準同型（**プリズム作用素** prism operator と呼ばれる）が存在することである．このようなとき，$\lambda_{0\sharp}$ と $\lambda_{1\sharp}$ は**鎖ホモトープ**(chain homotopic)であると言う．

もし，$\lambda_{0\sharp}$ と $\lambda_{1\sharp}$ が鎖ホモトープで，c を X の n 次元輪体とすると，

$$(\lambda_{1\sharp}-\lambda_{0\sharp})(c)=(\partial P+P\partial)(c)=\partial(Pc)$$

となり，$\lambda_{1\sharp}c$ と $\lambda_{0\sharp}c$ は，ホモローグであるから，$\lambda_{1*}=\lambda_{0*}$ である．それ故，この定理を証明するために，$\lambda_{1\sharp}$ と $\lambda_{0\sharp}$ が鎖ホモトープであることを示す．このために，P を定義する必要がある．

$\varphi:\Delta_n\to X$ を X の特異 n 単体，即ち，$S_n(X)$ の 1 つの元とする．各 $i=0,1\cdots n$ に対して，$P_i(\varphi)$ を

$$P_i(\varphi)(x_0,x_1,\cdots,x_{n+1})=\varphi(x_0,x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{n+1})\times\left(1-\sum_{k=0}^{i}x_k\right)$$

で定義される $S_{n+1}(X\times I)$ の元とし，$P(\varphi)\in S_{n+1}(X\times I)$ を

$$P(\varphi)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iP_i(\varphi)$$

で定義する．$P:S_n(X)\to S_{n+1}(X\times I)$ が準同型であることを示すのは難しくな

い.

$\partial P(\varphi)$ は

$$\partial P(\varphi)=\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j\partial_j P(\varphi)=\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j P_i(\varphi)$$

と書ける．$\partial_i P_i(\varphi)$ を，もう 1 つ違った形で書き直そう．

$i<j-1$ ならば，

$$\begin{aligned}\partial_j P_i(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)&=P_i(\varphi)(x_0,\cdots,x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_n)\\&=\varphi(x_0,\cdots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_{j-1},0,x_j\cdots x_n)\\&\quad\times\left(1-\sum_{k=0}^{i}x_k\right)\\&=\partial_{j-1}\varphi(x_0,\cdots,x_{i-1},x_i+x_{i+1},x_{i+2},\cdots,x_n)\\&\quad\times\left(1-\sum_{k=0}^{i}x_k\right)\\&=P_i(\partial_{j-1}\varphi)(x_0,\cdots,x_n)\\&=P_i\partial_{j-1}(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

$i>j$ ならば，

$$\begin{aligned}\partial_j P_i(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)&=P_i(\varphi)(x_0,\cdots,x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_n)\\&=\varphi(x_0,\cdots,x_{j-1},0,\cdots,x_{i-2},x_{i-1}+x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\&\quad\times\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}x_k\right)\\&=\partial_j\varphi(x_0,\cdots,x_{i-2},x_{i-1}+x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\\&\quad\times\left(1-\sum_{k=0}^{i-1}x_k\right)\\&=P_{i-1}(\partial_j\varphi)(x_0,\cdots,x_n)\\&=P_{i-1}\partial_j(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

最後に $i=j$ ならば

$$\begin{aligned}\partial_j P_j(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)&=P_j(\varphi)(x_0,\cdots,x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_n)\\&=\varphi(x_0,\cdots,x_n)\times\left(1-\sum_{k=0}^{j-1}x_k\right)\\&=P_{j-1}(\varphi)(x_0,\cdots,x_{j-1},0,x_j,\cdots,x_n)\\&=\partial_j P_{j-1}(\varphi)(x_0,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

まとめると，

$$\partial_j P_j=\partial_j P_{j-1}$$

$$\partial_j P_i = P_{i-1}\partial_j \qquad i>j \text{ のとき}$$
$$\partial_j P_i = P_i\partial_{j-1} \qquad i<j-1 \text{ のとき}$$

となる．∂P を

$$\partial P = \sum_{j=0}^{n+1}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j P_i$$
$$= \partial_0 P_0 + \sum_{i=j=1}^{n}\partial_j P_j + \sum_{i=j-1=0}(-1)\partial_j P_{i-1} - \partial_{n+1}P_n + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}\partial_j P_j + \sum_{i<j-1}(-1)^{i+j}\partial_j P_i$$

と書き，上の関係式を使えば，

$$\partial P = \partial_0 P_0 - \partial_{n+1}P_n - P\partial$$

となることが解る．ところが，

$$\begin{aligned}\partial_0 P_0(\varphi)(x_0, \cdots, x_n) &= P_0(\varphi)(0, x_0, \cdots, x_n)\\ &= \varphi(x_0, \cdots, x_n)\times 1\\ &= \lambda_1\varphi(x_0, \cdots, x_n)\\ &= \lambda_{1\sharp}(\varphi)(x_0, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

であり，

$$\begin{aligned}\partial_{n+1} P_n(\varphi)(x_0, \cdots, x_n) &= P_n(\varphi)(x_0, \cdots, x_n, 0)\\ &= \varphi(x_0, \cdots, x_n)\times 0\\ &= \lambda_0\varphi(x_0, \cdots, x_n)\\ &= \lambda_{0\sharp}\varphi(x_0, \cdots, x_n)\end{aligned}$$

である．故に，

$$\partial P + P\partial = \lambda_{1\sharp} - \lambda_{0\sharp}$$

であり，$\lambda_{1\sharp}$ と $\lambda_{0\sharp}$ は，鎖ホモトープである．よって定理が証明された．▌

29.15 練習問題

(a) $f: X\to Y$ がホモトピー同値ならば，各 $n\geq 0$ に対して，$f_*: H_n(X)\to H_n(Y)$ が同型写像であることを証明せよ．

(b) $i: A\to X$ を，X のレトラクト A の包含写像とすると，$i_*: H_n(A)\to H_n(X)$ は単射準同型であることを証明せよ．$g: X\to A$ をレトラクションとすると，

$$H_n(X) = \text{image}(i_*) \oplus \text{kernel}(g_*)$$

であることを証明せよ．更に，A が X の変形レトラクトならば，i_* は同型写像であることを証明せよ．

(c) X を道連結空間とし，$x_0 \in X$ を X の或る点とする．$p: X \to \{x_0\}$ を自明な写像とし，$\tilde{H}_n(X)$ を $p_*: H_n(X) \to H_n(\{x_0\})$ の核とする．$H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_0\})$ であることを証明せよ．

(d) $f: X \to Y$ を基点を保存する連続写像とする．誘導準同型

$$f_*: \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$$

が存在することを示せ．

更に，$g: X \to Y$ を，基点を保存する写像で，f と g は X の基点を動かさずに，ホモトープであるとする．

$$f_* = g_*: \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$$

であることを証明せよ．

我々の，ホモロジーの手近かな学習での次の結果は，空間の基本群と，一次元ホモロジー群の関係を説明するものである．

29.16 定　理

準同型

$$\phi: \pi(Y, y_0) \to H_1(Y)$$

が存在する．Y が道連結ならば，ϕ は全射であり，ϕ の核は，$\pi(Y, y_0)$ の交換子群である．言い換えれば，$H_1(Y)$ は $\pi(Y, y_0)$ の可換化である．

証明 $f: I \to Y$ を，始点が y_0 の Y の道とする．$\phi(f): \Delta_1 \to Y$ を

$$\phi(f)(x_0, x_1) = f(x_1) = f(1-x_0), \quad (x_0, x_1) \in \Delta_1$$

によって定義する．$\phi(f)$ は特異 1 単体である．f が閉道ならば，$\partial(\phi(f)) = y_0 - y_0 = 0$ であり，$\phi(f)$ は Y の 1 次元輪体である．

f と f' が同値な閉道ならば，$\phi(f)$ と $\phi(f')$ はホモローグな輪体であることを確かめる．$f \sim f'$ とし，$F: I \times I \to Y$ を，同値 $f \sim f'$ を実現する，$\{0, 1\}$ を動かさないホモトピーとする．2 単体 $\varphi: \Delta_2 \to Y$ を定義するために F を次のように使う．Δ_2 の点 Q の座標は，$0 \leq s, t \leq 1$ なる，或る s, t に対し $(1-s, s(1-t), st)$ と表現される(図 29.3を見よ)．$\varphi(Q)$ を $F(s, t)$ として定義する．$Q \in \Delta_2$ の座標 (x_0, x_1, x_2) を使えば，

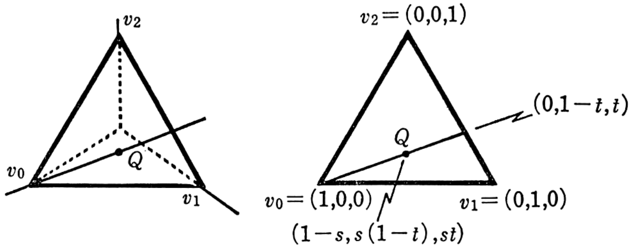


図 29. 3

$$\varphi(x_0, x_1x_2) = \begin{cases} F(1-x_0, x_2/(1-x_0)) & x_0 \neq 1 \text{ のとき} \\ F(0,0) & x_0 = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$x_2/(1-x_0)=x_2/(x_1+x_2)$ であり，勿論，$x_0, x_1, x_2 \geq 0$ であるから

$$0 \leq x_2/(1-x_0) \leq 1$$

であることに注意する．全ての $t \in I$ に対して，$F(0,t)=F(0,0)$ であるから，φ は連続である．その境界は簡単に計算される．$\varepsilon: I \to Y$ を定値道 $\varepsilon(t)=y_0$ として，

$$\partial_0\varphi(x_0, x_1) = \varphi(0, x_0, x_1) = F(1, x_1) = y_0 = \psi(\varepsilon)(x_0, x_1)$$

$$\partial_1\varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0, 0, x_1) = \begin{cases} F(1-x_0, x_1/(1-x_0)) & x_0 \neq 1 \text{ のとき} \\ F(0,0) & x_0 = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F(1-x_0, 1) & x_0 \neq 1 \text{ のとき} \\ F(0,0) & x_0 = 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$= \psi(f')(x_0, x_1)$$

$$\partial_2\varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0, x_1, 0) = F(1-x_0, 0) = \psi(f)(x_0, x_1)$$

言い換えれば，

$$\partial\varphi = \psi(f) - \psi(f') + \psi(\varepsilon).$$

しかし，$c_2: \Delta_2 \to Y$ を $c_2(x_0, x_1, x_2)=y_0$ で定義すれば

$$\partial_0 c_2 = \partial_1 c_2 = \partial_2 c_2 = c_1$$

であることが解る．但し，$c_1: \Delta_1 \to Y$ は，$c_1(x_0, x_1)=y_0$ で与えられるとする．従って $\psi(\varepsilon)=\partial c_2$ となり，輪体 $\psi(f)$ と $\psi(f')$ はホモローグである．これは，$\pi(Y, y_0)$ から $H_1(Y)$ への，矛盾なく定義された写像 ψ が存在することを示している．

ψ が準同型であることを確かめるために，f, f' を，y_0 を基点とする，Y の 2

つの閉道とする．$\phi(f*f')$ が $\phi(f)+\phi(f')$ とホモローグ，即ち，$\phi(f)+\phi(f')-\phi(f*f')$ が或る 2 単体，例えば $\varphi:\Delta_2\to Y$ に対して，境界輪体 $\partial\varphi$ であることを示す必要がある．φ の定義は，図 29.4 に示してあるが，はっきりと，

$$\varphi(x_0,x_1,x_2)=\begin{cases}f(1+x_2-x_0) & x_0\geq x_2 \text{ のとき}\\ f'(x_2-x_0) & x_0\leq x_2 \text{ のとき}\end{cases}$$

により与えられる．φ は貼り合わせ補題により連続であることに注意する．φ の境界は簡単に計算できる：

$$\partial_0\varphi(x_0,x_1)=\varphi(0,x_0,x_1)=f'(x_1)=\phi(f')(x_0,x_1)$$

$$\begin{aligned}\partial_1\varphi(x_0,x_1)=\varphi(x_0,0,x_1)&=\begin{cases}f(1+x_1-x_0) & x_0\geq x_1 \text{ のとき}\\ f'(x_1-x_0) & x_0\leq x_1 \text{ のとき}\end{cases}\\ &=\begin{cases}f(2x_1) & x_1\leq\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\\ f'(2x_1-1) & x_1\geq\dfrac{1}{2}\text{ のとき}\end{cases}\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad (x_1+x_0=1)\\ &=\phi(f*f')(x_0,x_1)\end{aligned}$$

$$\partial_2\varphi(x_0,x_1)=\varphi(x_0,x_1,0)=f(1-x_0)=\phi(f)(x_0,x_1)$$

従って，

$$\partial\varphi=\phi(f')-\phi(f*f')+\phi(f)$$

となり，これは $\phi(f*f')$ が，$\phi(f)+\phi(f')$ とホモローグであることを示しているので，ϕ は準同型である．

次に，Y は道連結であると仮定する．ϕ が全射であることを示そう．$c=\sum n_j\varphi_j$ を Y の 1 次元輪体とする：従って，$\partial c=0$, 即ち，

$$\sum n_j(\varphi_j(v_0)-\varphi_j(v_1))=0$$

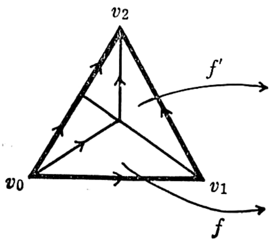


図 29.4

である．∂c を $\sum_{y\in Y}m_y$ と書き直すと，全ての $y\in Y$ に対して，$m_y=0$ でなければならない．各 $j\in J$ に対して始点 y_0，終点 $\varphi_j(v_0)=f_0\varphi_j(1)$ の道 g_{j_0} と，始点 y_0，終点 $\varphi_j(v_1)=\partial_1\varphi_j(1)$ の道 g_{j_0} と，始点 y_0，終点 $\varphi_j(v_1)=\partial_1\varphi_j(1)$ の道 g_{j_1} を選ぶ．これらの道は，終点にのみ依存しなければならないから，$\varphi_j(v_0)=\varphi_k(v_0)$ ならば $g_{j_0}=g_{k_0}$ で

ある．明らかに，

$$\sum n_j(\psi(g_{j_1})-\psi(g_{j_0}))=0$$

でなければならない（g_y を y_0 から y への道とする．すると，$\sum n_j(\psi(g_{j_1})-\psi(g_{j_0}))$ は $\sum_{y\in Y} m_y\psi(g_y)$ と書き換えられる）．

σ_j を

$$\sigma_j=\psi(g_{j_0})+\varphi_j-\psi(g_{j_1})$$

として定義される特異1次元鎖とすると，

$$c=\sum n_j\sigma_j$$

を得る．$f_j: I\to Y$ で，$f_j(t)=\varphi_j(1-t,t)$ により与えられる道を表わせば，$(g_{j_0}*f_j)*\bar{g}_{j_1}$ は y_0 を基点とする Y の閉道であり，

$$\psi((g_{j_0}*f_j)*\bar{g}_{j_1})=\sigma_j$$

であり，

$$\psi(\prod_j[(g_{j_0}*f)*\bar{g}_{j_1}]^{n_j})=c$$

となる．従って ψ は全射である．

ψ の核が，交換子群であることを証明する．$\psi(f)$ は0にホモローグであると仮定すると，

$$\psi(f)=\partial(\sum_{j\in J}n_j\varphi_j)=\sum_{j\in J}n_j(\varphi_{j0}-\varphi_{j1}+\varphi_{j2})$$

である．但し，ここで，$\varphi_j (j\in J)$ は，特異2単体であり，$\varphi_{ji}=\partial_i\varphi_j\ (i=0,1,2)$ とする．$\psi(f)$ は特異1単体であるから，或る k,l に対して，$\psi(f)=\varphi_{kl}$ でなければならず，上の式の右辺を整理すると，$\psi(f)=\varphi_{kl}$ の係数は1で，他の全ての項の係数は0である．

$g_{ji}(j\in J,\ i=0,1,2)$ で，始点 y_0，終点 $\varphi_j(v_i)$ の Y の道を表わす．前と同じように，g_{ji} は終点 $\varphi_j(v_i)$ にのみ依存すべきで，特に，添字には依存しない．もし，$\varphi_j(v_i)=y_0$ ならば，定値道を選ぶことにする．図29.5を参照せよ．

$f_{ji}(j\in J,\ i=0,1,2)$ を

$$f_{ji}(t)=\varphi_{ji}(1-t,t)=\partial_i\varphi_i(1-t,t)$$

により定義される Y の道とし，道 $h_{ji}(j\in J,\ i=0,1,2)$ を

$$h_{j_0}=(g_{j_1}*f_{j_0})*\bar{g}_{j_2}$$
$$h_{j_1}=(g_{j_0}*f_{j_1})*\bar{g}_{j_2}$$
$$h_{j_2}=(g_{j_0}*f_{j_2})*\bar{g}_{j_1}$$

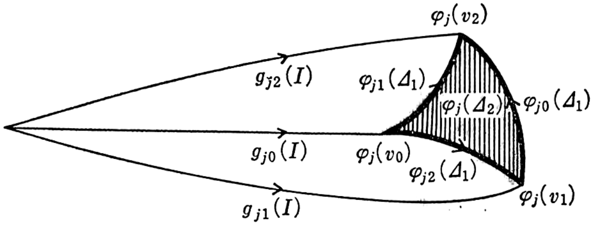


図 29.5

と定義する．そして，道 $h_j(j\in J)$ を

$$h_j=(h_{j_0}*\bar{h}_{j_1})*h_{j_2}$$

として定義する．h_j が

$$(g_{j1}*((f_{j0}*\bar{f}_{j1})*f_{j2}))*\bar{g}_{j1}$$

に同値なことが示され，これは明らかに，定値道 ε に同値である．従って

$$\prod_j[h_j]^{n_j}=1$$

である．

$A\pi(Y,y_0)$ で，$\pi(Y,y_0)$ の交換子群による商群を表わす(即ち，$A\pi(Y,y_0)$ は $\pi(Y,y_0)$ の可換化である.) $[\alpha]$ が $\pi(Y,y_0)$ の元のとき，$[[\alpha]]$ によって，対応する $A\pi(Y,y_0)$ の元を表わす．$\prod[h_j]^{n_j}=1$ であるから

$$\prod[[h_j]]^{n_j}=1$$

となる．或る k,l に対して，$\phi(f)=\varphi_{kl}$ である．従って $f=f_{kl}$ であり，(g_{ji} の取り方から) $f=h_{kl}$ でもある．$A\pi(Y,y_0)$ はアーベル群であるから，式 $\prod[[h_j]]^{n_j}$ の項を整理して，

$$\prod[[h_j]]^{n_j}=[[f]]$$

となる．従って $[[f]]=1$，即ち，$[f]$ は交換子群に含まれる．一方，$H_1(Y)$ がアーベル群であることは，ϕ の核が交換子群に含まれることを意味する．よって定理が証明された．▌

29.17 練習問題

(a) $H_1(S^1)\cong \boldsymbol{Z}$, $H_1((S^1)^n)\cong \boldsymbol{Z}^n$ であることを示せ．

(b) Y が連結でないならば，$A\pi(Y,y_0)$ が $H_1(Y)$ に同型でないことを示す例を挙げよ．

(c)　(i) 種数 g の向き付け可能な曲面，および，(ii) 種数 g の向き付け不可能な曲面の 1 次元ホモロジー群を計算せよ．2 つの曲面 S_1, S_2 が同相であるための必要十分条件は，$H_1(S_1) \cong H_1(S_2)$ となることであることを示せ．

(d)　Y は道連結と仮定する．$\pi(Y, y_0)$ と $H_1(Y)$ が同型であるための必要十分条件は，$\pi(Y, y_0)$ がアーベル群であることを証明せよ．

(e)　8 の字の 1 次元ホモロジー群は $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ に同型であることを示せ．

(f)　S を曲面とし，S' を S から 1 つの開円板近傍を取り除いたものとする．$H_1(S) \cong H_1(S')$ であることを証明せよ．

基本群を計算するときに，ザイフェルト－ファン・カンペンの定理が非常に有益なことを見た．ホモロジー理論に対して，それに似た定理をこれから述べよう．

U_1 と U_2 を X の開集合とし，$X = U_1 \cup U_2$ とする．$i = 1, 2$ に対して，$\varphi_i : U_1 \cap U_2 \to U_i$, $\psi_i : U_i \to X$ を包含写像とする．準同型

$$i : H_k(U_1 \cap U_2) \to H_k(U_1) \oplus H_k(U_2)$$
$$j : H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \to H_k(X)$$

を

$$i(c) = (\varphi_{1*}(c),\ \varphi_{2*}(c))$$
$$j(c_1, c_2) = \psi_1{*}(c) - \psi_{2*}(c_2)$$

で定義する．

29.18　定　　理

U_1 と U_2 を X の開集合とし，$X = U_1 \cup U_2$ とする．準同型

$$\Delta : H_k(X) \to H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$$

が存在して，次の群と準同型の系列

$$\cdots \to H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{i} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \xrightarrow{j} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \to \cdots$$

に於て，各準同型の核は，そのすぐ手前の準同型の像に等しくなる．

更に，Y を $Y = V_1 \cup V_2$, (V_1, V_2 は Y で開) なるもう 1 つの空間とし，$f : X \to Y$ を $f(U_i) \subseteq V_i$ なる連続写像とすると，

$$(f | U_1 \cap U_2)_* \Delta = \Delta f_*$$

となる．即ち，準同型写像 Δ は，誘導準同型と可換である．

準同型 Δ は**接続準同型** (connecting homomorphism) と呼ばれ，定理 29.18 の系列は**マイヤー-ヴィートリス** (Mayer–Vietoris) **系列**と呼ばれる．一般に，各準同型の核が，その直ぐ手前の準同型の像に等しいような群と準同型の系列は，**完全系列**と呼ばれる．従って，マイヤー－ヴィートリス系列は完全系列である．定理 29.18 については，1 つの定理と，それから得られるいくつかの重要な系を証明するために有効であること (従って，ホモロジー論で有効であること) を指摘するに止め，定理 29.18 の証明は行わない．

29.19 定　　理

n を正の整数とすると，

$$H_k(S^n)=\begin{cases}\boldsymbol{Z}, & k=0,\ n\ のとき\\ 0 & その他のとき\end{cases}$$

である．更に，$T_n: S^n \to S^n$ を，$T_n(x_0, x_1, \cdots, x_n)=(-x_0, x_1, \cdots, x_n)$ で与えられる鏡映写像とすると，

$$T_{n*}: H_n(S^n) \to H_n(S^n)$$

は -1 の掛け算である．

証明　マイヤー－ヴィートリス系列を帰納的に使って証明する．$U_1=\{x\in S^n\,;\, x_n>-1/2\}$，$U_2=\{x\in S^n\,;\, x_n<1/2\}$ とする．U_1 と U_2 は可縮であり，$U_1\cap U_2$ は S^{n-1} にホモトピー同値であることに注意すれば，

$$H_k(U_i)=\begin{cases}\boldsymbol{Z} & k=0\ のとき\\ 0 & その他のとき\end{cases}$$

$$H_k(U_1\cap U_2)=H_k(S^{n-1})$$

である．

もし，S^{n-1} を $\{x\in S^n\,;\, x_n=0\}$ と考えれば，$T_n|S^{n-1}=T_{n-1}$ であることに注意する．

$n=1$ とする．$k=1$ に対して，マイヤー－ヴィートリス系列は，

$$\cdots\to 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^0) \xrightarrow{i} \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} \xrightarrow{j} \cdots$$

となり，結局，

$$\cdots\to 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} \xrightarrow{i} \boldsymbol{Z}\oplus\boldsymbol{Z} \xrightarrow{j} \cdots,\ i(x, y)=(x+y, x+y)\ となる．$$

$\ker(\Delta)=\mathrm{in}(j)=0$ であるから，Δ は単射である．更に，$\mathrm{im}(\Delta)=\ker(i)=\{(x,$

$-x) \in \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z}\}$ で，これは $\boldsymbol{Z}$ に同型であるから，$H_1(S^1)=\boldsymbol{Z}$ である．$T_{0*}(x, y)=(y, x)$ は明らかであり，$T_{0*}\Delta=\Delta T_{1*}$ であるから，T_{1*} は -1 の掛け算であることが解る．$k>1$ に対して系列は

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{i} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^0) \xrightarrow{j} 0 \to \cdots$$

となり，Δ が同型であることが簡単に解る ($\ker(\Delta)=\mathrm{im}(i)$ により単射であり，$\mathrm{im}(\Delta)=\ker j$ により全射である)．従って，$n=1$ の場合，定理は証明された．

$m>1$ とし，定理は $n=m-1$ のとき成り立つと仮定する．このとき $n=m$ でも定理が成り立つことを示そう．

$k=1$ のとき

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \boldsymbol{Z} \oplus \boldsymbol{Z} \to \cdots$$

となるから，$\ker(i)=0$ でよって $\mathrm{im}(\Delta)=0$ となり，$H_1(S^m)=0$ となる．

$k>1$ ならば

$$\cdots \to 0 \xrightarrow{j} H_k(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{i} 0$$

となるから，$H_k(S^m) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$ であることが解る．更に，$k=m$ のとき，$T_{m-1*}\Delta=\Delta T_{m*}$ を使えば，T_{m*} が -1 の掛け算であることが解る．よって，帰納法により定理が証明された．

29.20　系

(a)　$n \neq m$ ならば，S^n と S^m は同じホモトピー型を持たない．

(b)　任意の $f: D^2 \to D^2$ は不動点を持つ．

(c)　折り返し写像 $T_n: S^n \to S^n$ は恒等写像とホモトープでない．

(d)　$A(x)=-x$ によって与えられる対蹠写像，$A: S^{2n} \to S^{2n}$ は恒等写像にホモトープでない．

(e)　$f: S^{2n} \to S^{2n}$ が恒等写像にホモトープならば，f は不動点を持つ．

(f)　連続写像 $f: S^{2n} \to S^{2n}$ で，全ての $x \in S^{2n}$ に対して，ベクトル x と $f(x)$ が $\boldsymbol{R}^{2n+1}$ に於て直交するようなものは存在しない．

(a) はホモトピー不変性定理 (定理 29.14) から解る：練習問題 29.15 (a) を参照せよ．(b) は Brower (ブロウェル) の不動点定理であり，系 16.10 と同様な方法で証明される．(c) はホモトピー不変性定理から解る．(d) は，R_i を第 i 座標の折り返しとすると，$A=R_0R_1\cdots R_{2n}$ となり，$A_*: H_{2n}(S^{2n}) \to H_{2n}(S^{2n})$ は

$(-1)^{2n+1}=-1$ の掛け算となることから解る．(e)は，f が不動点を持たないと仮定すると，全ての x に対して，$(1-t)f(x)+tx \neq 0$ となり，f と A とのホモトピー $F: S^{2n} \times I \to S^{2n}$ が

$$F(x,t) = ((1-t)f(x)-tx)/\|(1-t)f(x)-tx\|$$

で定義できてしまう．最後に (f) は，x と $f(x)$ が直交するとすると，$f(x) \neq x$ だから，(e)により示される．

(e)と(f)は，$n=1$ に対しては，俗に"毛むくじゃらのボール定理"と呼ばれる，実際的な解釈がある．これは，もし，毛むくじゃらのボール(即ち，球面 S^2 の各点から1本の毛が生えている D^3)があったとすると，それを S^2 上に滑らかに，梳(と)かすことはできない，という定理である．実際，どんなやり方をしても，毛に，はげた部分か，分け目ができてしまう．証明は，もし滑らかに梳かされた毛むくじゃらのボールがあったとしたら，x に於ける毛の方向ベクトル $f(x)$ はベクトル x に直交することによる．しかし，毛むくじゃらのトーラスは，滑らかに梳かすことができることに注意する．この事実は，核融合炉に重要な応用を持っている．

29.21 練 習 問 題

(a) $\boldsymbol{R}P^2$ のホモロジーを，マイヤー－ヴィートリス系列を使って計算せよ．

(b) 結び目の補集合のホモロジーを，マイヤー－ヴィートリス系列を使って計算せよ．系 28.4 を導け．

(c) D^n の S^{n-1} へのレトラクションは存在しないことを証明せよ．

(d) M を m 次元多様体，N を n 次元多様体とする．$m \neq n$ ならば，M と N は同相でないことを証明せよ．これは，**次元の位相不変性**(topological invariance of dimension)と呼ばれる(ヒント：練習問題 11. 12(f)で述べられた同相写像 $M/(M-D) \cong S^m$ を使え)．

ホモロジー群の定義の仕方は他にも沢山有る．空間の非常に大きな類(例えば(CW 複体)に対して，これら全ての理論は一致する．このことから，ホモロジー論への公理的な接近が行われ，1950年代初めに，アイレンベルグとスティーンロッドにより最初に行われた，所謂"被約ホモロジー論(reduced homology theories)"の公理系を述べよう．これらは(基本群と同じように)基点を持

つ位相空間上に定義される．基点 $x_0 \in X$ を持つ空間 X の "被約特異ホモロジー群 (reduced singular homology group)" は $p: X \to \{x_0\}$ を自然な写像とするとき，

$$\tilde{H}_n(X) = \mathrm{kernel}\,(P_* : H_n(X) \to H_n\{x\})$$

によって定義される（練習問題 29.15(c) を見よ）．基点を保存する写像 $f: X \to Y$ が与えられているとき，自然な方法で，誘導準同型 $f_*: \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$ が定義される．

被約ホモロジー群の公理を与える前に，簡単にいくつかの記号を導入する．

29.22　定　　義

X を，基点 x_0 を持つ位相空間とする．$\sum X$ を，自然な基点をもつ商空間 $(X \times I)/(X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$

と定義する．$\sum X$ を X の**被約懸垂** ((reduced) suspension) と言う．

$f: X \to Y$ を，基点を保存する連続写像とすると，それが，自然に定義される．基点を保存する連続写像 $\sum f: \sum X \to \sum Y$ を誘導することに注意する．

29.23　定　　義

X の**被約錐** (reduced cone) CX を，商空間

$$(X \times I)/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I)$$

として定義する．$f: X \to Y$ を，基点を保存する連続写像とするとき，f の**写像錐** (mapping cone) を，$(x, 0) \in CX$ と $f(x) \in Y$ に対して

$$(x, 0) \sim f(x)$$

によって与えられる同値関係による商空間

$$(CX \cup Y)/\sim$$

と定義する．C_f の基点は，Y の基点 y_0 に対応する C_f の点である．

自然な包含写像

$$i: Y \to C_f$$

が存在することに注意する．

29.24 練習問題

(a) $p : X \to \{x_0\}$ を定値写像とすると，C_p が $\sum X$ になることを証明せよ．

(b) X がハウスドルフならば，$\sum X$ もハウスドルフであることを証明せよ．

(c) $\sum S^1 \cong S^2$ を証明せよ．

さて，被約ホモロジー論に対するアイレンベルグ－スチィーンロッドの公理を与えよう．これからは，全ての空間は基点を持ち，それらの間の写像は全て基点を保存する連続写像とする．

基点を持つ位相空間の集まりの上で定義される**被約ホモロジー論** (reduced homology theory) は次のものから成る．

(A) 族 $\{\tilde{H}_n\,;\, n \in \boldsymbol{Z}\}$，但し $\tilde{H}_n$ は各空間 X に，アーベル群 $\tilde{H}_n(X)$ を対応させる．

この群を X の **n 次元被約ホモロジー群**と言う．

(B) 各基点を保存する連続写像 $f : X \to Y$ に対して，**誘導準同型** $f_*\,;\, \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(Y)$ が全ての n に対して存在する．

(C) 各空間 X と各整数 n に対して，準同型 $\sigma_n(X) : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n+1}(\sum X)$ が存在する．準同型 $\sigma_n(X)$ を**懸垂準同型** (suspension homomorphism) と言う．

以上のものは，次の 7 つの公理を満たしている．

(1) （恒等写像公理）　$1 : X \to Y$ を恒等写像とするとき，誘導準同型

$$1_* : \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_n(X)$$

は各 n に対して同型である．

(2) （合成公理）　$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ を（基点を保存する連続）写像とするとき，$(gf)_* = g_* f_*$ である．

(3) （懸垂の自然性公理）　$f : X \to Y$ を連続写像とするとき，次の図式は可換である．

$$\begin{array}{ccc}
\widetilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\ \sigma_n(X)\ } & \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \\
\Big\downarrow f_* & & \Big\downarrow (\Sigma f)_* \\
\widetilde{H}_n(Y) & \xrightarrow{\ \sigma_n(Y)\ } & \widetilde{H}_{n+1}(\Sigma Y)
\end{array}$$

(4) (ホモトピー公理) 写像 $f, g: X \to Y$ が，X の基点を動かさないで，ホモトープであるとき，誘導準同型，f_* と g_* は等しい．

(5) (懸垂公理) 懸垂準同型 $\sigma_n(X): \tilde{H}_n(X) \to \tilde{H}_{n+1}(\sum X)$ は，全ての X と，全ての n に対して同型である．

(6) (完全性公理) 各写像 $f: X \to Y$ に対して，系列 $\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(C_f)$ は全ての n に対して，$\mathrm{image}(f_*) = \mathrm{kernel}\ i_*$ という性質をみたす．但し $i: Y \to C_f$ は自然な包含写像である．

(7) (次元公理)

$$\tilde{H}_n(S^0) = \begin{cases} \boldsymbol{Z} & n = 0 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他のとき} \end{cases}$$

29.25 練習問題

被約特異ホモロジー論は，上の意味で，被約ホモロジー論であることを示せ．(ヒント：(5)と(6)に対しては，マイヤー－ヴィートリス系列を用いよ)．

上の次元公理の代りに，或るアーベル群 G_n, $n \in \boldsymbol{Z}$, の集りに対して，

$$\tilde{H}_n(S^0) = G_n$$

とすれば，所謂，係数 $\{G_n; n \in \boldsymbol{Z}\}$ をもつ，一般化された被約ホモロジー論 (generalized reduced homology theory with coefficients) を得る．その理論は，現代代数的トポロジーに於て，顕著な位置を得ている．

30

参考文献案内

この章では，この先を読むのに適した本を推薦しておこう．この本に書かれているより多くのトポロジーの知識を仮定する本は含まれていない．本の選択は著者の(偏った)好みに依っている．[Spanier]は，様々な機会で記載されている．これは読みずらいところもいくつかある本だが，代数的トポロジーのallround な優れた本である．

多様体　多様体に関する一般論は[Dold]を見よ．2次元多様体および3次元多様体については[Moise]を見よ．多様体の重要なクラスの1つに，所謂，“可微分多様体”がある．これらに関しては，[Hirsch]を見よ．

ホモトピー論　[Gray], [Spanier], [Whitehead]の3つの本を推薦する．

被覆空間　被覆空間は“ファイバー束”へと一般化されるが，これに関しては[Husemoller]と[Spanier]が良い．

群の作用　位相空間については，[Bredon]を見よ．多様体については[Conner & Floyd]と[Conner]を見よ．

結び目の理論　[Rolfsen]

ホモロジー　更に進んだ特異ホモロジー論については[Dold], [Greenberg], [Spanier], [Vick]を見よ．ホモロジー論の他の2つのタイプは，単体的ホモロジーと，Cech ホモロジーである．[Spanier]は両方扱っている．[Maunder]は単体的ホモロジーに適していて，[Dold], [Massey]はCech ホモロジーに対して推薦する．一般化されたホモロジー論については，[Gray], [Switzer]を見よ．[Gray]は純粋にホモトピーの見地から一般化されたホモロジー論を扱っている．最後に，公理的ホモロジー論の最初の本は[Eilenberg & Steenrod]である．

参考文献

Bredon, G. E. *Introduction to compact transformation groups.* Academic Press, New York–London, 1972.

Conner, P. E. *Differentiable periodic maps* (second edition). Springer, Berlin-Heidelberg–New York, 1979.

Conner, P. E. & Floyd, E. E. *Differentiable periodic maps.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1964.

Dold, A. *Lectures on algebraic topology.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1972.

Eilenberg, S. & Steenrod, N. *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Princeton, N. J., 1952.

Gray, B. *Homotopy theory.* Academic Press, New York–San Francisco–London, 1975.

Greenberg, M. J. *Lectures on algebraic topology.* Benjamin, New York, 1967.

Hirsch, M. W. *Differential topology.* Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1976.

Husemoller, D. *Fibre bundles* (second edition). Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1975.

Massey, W. S. *Homology and cohomology theory.* Marcel Dekker, New York–Basel, 1978.

Maunder, C. R. F. *Introduction to algebraic topology.* Cambridge University Press, 1980.

Moise, E. E. *Geometric topology in dimensions 2 and 3.* Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.

Rolfsen, D. *Knots and links.* Publish or perish, Berkeley, Ca., 1976

Spanier, E. H. *Algebraic topology.* McGraw Hill, New York, 1966.

Switzer, R. M. *Algebraic topology–homotopy and homology.* Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1975.

Vick, J. W. *Homology theory.* Academic Press, New York–London, 1973.

Whitehead, G. W. *Homotopy theory.* M. I. T. Press, Cambridge, Mass., 1966.

索　引

あ　行

か　行

さ行

た　行

な　行

は　行

訳者略歴

加藤十吉

1942年　横浜市生れ
1965年　早稲田大学理工学部数学科卒業
1966年　東京都立大学理学部助手，1968年　同講師，
　　　　1971年　同助教授
1971年　東京大学教養学部助教授
1982年　九州大学理学部教授
　　　　理学博士

著書
『位相幾何学』日本放送出版協会
『組合せ位相幾何学』（岩波基礎数学講座）岩波書店
『トポロジー』サイエンス社
『集合と位相』朝倉書店

トポロジー入門

1983年8月25日　初版
1991年4月10日　第3刷
［検印廃止］

訳者　加藤十吉（かとうみつよし）

発行所　財団法人　東京大学出版会
代表者　菅野卓雄
113 東京都文京区本郷 7-3-1　東大構内
電話 03(3811)8814・振替東京 6-59964

印刷所　株式会社理想社印刷所
製本所　永澤製本所

ISBN 4-13-062059-2　Printed in Japan